Skalární součin

Pruhem značíme *komplexně sdružené* číslo $\overline{a+bi} = a - bi$.

Definice: *Skalární součin* na vektorovém prostoru V nad $\mathbb{C}$ je zobrazení, které přiřadí každé dvojici vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ skalár $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{C}$, tak, že jsou splněny následující axiomy:

- $\forall \boldsymbol{u} \in V : \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle \in \mathbb{R}_0^+$
- $\forall \boldsymbol{u} \in V : \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle}$
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V : \langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle$
- $\forall \boldsymbol{u} \in V, \forall t \in \mathbb{C} : \langle t\boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = t \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$

(Formálně je každý skalární součin zobrazení $V \times V \to \mathbb{C}$.)

Skalární součin na V nad $\mathbb{R}$ se omezuje na $\mathbb{R}$, tj. obor hodnot je $\mathbb{R}$, přičemž platí $\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$ ve třetím axiomu a $t \in \mathbb{R}$ v posledním.

Ukázky skalárních součinů

- *Standardní skalární součin* na $\mathbb{R}^n$:

  $$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{u}$$

- *Standardní skalární součin* na $\mathbb{C}^n$:

  $$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = u_1 \overline{v_1} + \cdots + u_n \overline{v_n} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} = \boldsymbol{v}^{\mathsf{H}} \boldsymbol{u}$$

  Index H značí *hermitovskou transpozici* danou $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{H}})_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

- Skalární součin na $\mathbb{R}^n$ určený *regulární* maticí $\boldsymbol{A}$:

  $$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{u}$$

  např. pro $V = \mathbb{R}^2$ a $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dostaneme:

  $$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + 2 u_1 v_2 + 2 u_2 v_1 + 5 u_2 v_2$$

- Skalární součin na vektorovém prostoru reálných polynomů na intervalu $[a, b]$: $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$

Vlastnosti skalárního součinu

Pozorování: Ze třetího axiomu lze odvodit, že skalární součin vektoru se sebou samým bude vždy reálné číslo:
$\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle} \Rightarrow \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle \in \mathbb{R}$. První axiom dává navíc nezápornost.

Pozorování: Linearita vůči sčítání v druhé složce: $\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{w}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} + \overline{\langle \boldsymbol{w}|\boldsymbol{u}\rangle} = \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{w}\rangle$

Pozorování: Při vytýkání z druhé složky dostáváme komplexně sdružený skalár: $\langle \boldsymbol{u}|t\boldsymbol{v}\rangle = \overline{\langle t\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{t\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{t}\,\overline{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle} = \overline{t}\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle$

Důsledek: Pro skalární součin lineárních kombinací vektorů platí:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i\boldsymbol{u}_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{l} b_j\boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_i\overline{b_j}\langle \boldsymbol{u}_i|\boldsymbol{v}_j\rangle$$

Důsledek: I při násobení vektoru komplexním skalárem zůstává skalární součin vektoru se sebou samým reálný a nezáporný:
$\langle t\boldsymbol{u}|t\boldsymbol{u}\rangle = t\overline{t}\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle = |t|^2\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle$

Norma

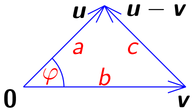
Definice: Je-li V prostor se skalárním součinem (nad $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$), pak *norma odvozená ze skalárního součinu* je zobrazení $V \to \mathbb{R}_0^+$ přiřazující vektoru $\boldsymbol{u}$ jeho normu $||\boldsymbol{u}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle}$.

Pozorování: Pro normu skalárního násobku platí: $||t\boldsymbol{u}|| = |t| \cdot ||\boldsymbol{u}||$.

Geometrická interpretace v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^n$:
$||\boldsymbol{u}||$ ... délka $\boldsymbol{u}$
$||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||$ ... vzdálenost bodů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$
$\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle$ ... souvisí s „úhlem“ mezi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a délkami $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Přesněji:

Pozorování: Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ a související norma splňují: $\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle = ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cos\varphi$, kde φ značí úhel sevřený vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, přičemž vektory jsou zde brány jako úsečky vycházející z $\mathbf{0}$.

Důkaz:



V kosinové větě: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$.
nahradíme $a = ||\boldsymbol{u}||$, $b = ||\boldsymbol{v}||$, $c = ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||$.
$\langle \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle - 2||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| \cos\varphi$
Z linearity: $= \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle - \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle$

Cauchyho-Schwarzova nerovnost

Věta: Skalární součin libovolných dvou vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$ splňuje: $|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle}$.

Jinými slovy, vzhledem související normě: $|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| \leq ||\boldsymbol{u}||\cdot||\boldsymbol{v}||$.

Důkaz: Pro $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ nebo $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, dostaneme $0 \leq 0$.
Pro jakékoli $t \in \mathbb{C}$ platí, že $||\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}||^2 \geq 0$, ale také:
$||\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}||^2 = \langle \boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}|\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle + t\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle + \overline{t}\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle + t\overline{t}\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle$

Pro vzájemné odečtení posledních dvou členů zvolíme $t = -\frac{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle}$.
Dostaneme:

$$\begin{array}{rcll}
0 & \leq & \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle - \frac{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle}\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle & \ldots \cdot \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle > 0 \\
\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{u}\rangle & \leq & \langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle & \ldots \text{ na } \mathbb{C} \text{ platí } z\overline{z} = |z|^2 \\
|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle|^2 & \leq & ||\boldsymbol{u}||^2 \cdot ||\boldsymbol{v}||^2 & \ldots \text{ odmocníme} \\
|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| & \leq & ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| &
\end{array}$$

Důsledky

Věta: (nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem)

Pro libovolný $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$: $\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

Důkaz: Zvolíme $\boldsymbol{v} = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathsf{T}}$ a použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnost pro standardní skalární součin:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle \leq |\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle| \leq ||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \cdot \sqrt{n}$$

Tvrzení: Každá norma odvozená ze skalárního součinu splňuje trojúhelníkovou nerovnost: $||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$

Důkaz:

$$||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}|| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \rangle} = \sqrt{\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{u} \rangle + \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \rangle} \leq$$

$$\sqrt{||\boldsymbol{u}||^2 + 2|\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle| + ||\boldsymbol{v}||^2} \leq \sqrt{||\boldsymbol{u}||^2 + 2||\boldsymbol{u}|| \cdot ||\boldsymbol{v}|| + ||\boldsymbol{v}||^2} = ||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Standardní skalární součin $\langle (1, 2+\mathrm{i}, 3\mathrm{i})^{\mathsf{T}} | (3, 2-\mathrm{i}, 1)^{\mathsf{T}} \rangle$ je roven: a) $8-3\mathrm{i}$ b) $8+\mathrm{i}$ c) $6-\mathrm{i}$ d) $6+7\mathrm{i}$ e) 11
2. Pravda nebo lež?
   Zobrazení $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \to \boldsymbol{u}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v}$ je skalární součin na $\mathbb{C}^n$.
   (Všimněte si obráceného pořadí vektorů v $\boldsymbol{u}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{v}$.)
3. Jaká může být dimenze množiny $\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \colon \langle \boldsymbol{u} | (1,2,3)^{\mathsf{T}} \rangle = 1\}$ (vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{R}^3$)?
   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) nelze určit
4. Pro nenulové $\boldsymbol{u}$ má výraz $\left\| \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\boldsymbol{u} \right\|$ hodnotu:
   a) 0 b) $-\|\boldsymbol{u}\|$ c) 1 d) $\|\boldsymbol{u}\|^{-1}$ e) žádná z možností
5. Pravda nebo lež? Cauchyho-Schwarzova nerovnost platí i vzhledem ke sčítání: $|\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle| \leq \sqrt{\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle + \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}\rangle}$

Komentář k řešení kvízu

1. Přímým výpočtem: $\langle (1, 2+\mathrm{i}, 3\mathrm{i})^\mathsf{T} | (3, 2-\mathrm{i}, 1)^\mathsf{T} \rangle$
   $= 1 \cdot 3 + (2+\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) + 3\mathrm{i} \cdot 1 = 3 + 4 + 4\mathrm{i} - 1 + 3\mathrm{i} = 6 + 7\mathrm{i}$
2. Zobrazení je lineární vůči skalárním násobkům ve *druhé* složce.
3. Jde o afinní prostor určený jednou rovnicí o třech neznámých: $u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 1$ a ten má dimenzi 2.
4. Z linearity normy vůči skalárním násobkům nebo přímo:
   $\left|\left| \frac{1}{||\boldsymbol{u}||}\boldsymbol{u} \right|\right| = \sqrt{\left\langle \frac{1}{||\boldsymbol{u}||}\boldsymbol{u} \middle| \frac{1}{||\boldsymbol{u}||}\boldsymbol{u} \right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{||\boldsymbol{u}||^2}\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{u}\rangle} = \frac{||\boldsymbol{u}||}{||\boldsymbol{u}||} = 1$
5. Protipříklad lze sestavit už v prostoru $\mathbb{R}^1$, kde se skalární součin shoduje s obvyklým násobením:
   $|\langle (4)^\mathsf{T} | (3)^\mathsf{T} \rangle| = 12 \not\leq 5 = \sqrt{\langle (4)^\mathsf{T} | (4)^\mathsf{T} \rangle + \langle (3)^\mathsf{T} | (3)^\mathsf{T} \rangle}$

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Který z axiomů skalárního součinu na $\mathbb{C}^n$ by byl porušen, kdybychom namísto hermitovské transpozice $\boldsymbol{v}^{\mathsf{H}}\boldsymbol{u}$ použili obyčejnou transpozici $\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{u}$?
- Pokud bychom na vektorovém prostoru nekonečných posloupností reálných čísel přiřadili dvěma posloupnostem $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ a $(b_i)_{i=1}^{\infty}$ hodnotu výrazu $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$, vyhovovalo by toto přiřazení definici skalárního součinu?
- Čím byl omezen součet dvou komplexních čísel $a + \overline{a}$ ve třetím kroku důkazu trojúhelníkové nerovnosti? Jaká vlastnost komplexních čísel byla zde využita?

Poznámky k pojmosloví a značení

Standardní skalární součin $\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ na $\mathbb{R}^n$ se v anglické literatuře nazývá „*dot product*“ a značí se $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

Obecný skalární součin se pak nazývá „*inner product*“.

V české literatuře se pro *standardní* skalární součin často používá značení $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, podle normy ČSN-ISO.

Obecný skalární součin bývá značen i $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v})$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, $s(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ apod.

Hermitovská transpozice je nazvána na počest francouzského matematika Charlese Hermita.

Charles Hermite
1822 – 1901
[obr. MacTutor]