Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ a její charakteristický polynom
$p_{\boldsymbol{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ platí:
$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (-1)^n\boldsymbol{A}^n + b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + b_2\boldsymbol{A}^2 + b_1\boldsymbol{A} + b_0\mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}$.

Symbol $\mathbf{0}_{n,n}$ značí nulovou čtvercovou matici řádu n.

Ukázka:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad p_{\boldsymbol{A}}(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

$$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^3 + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$-\begin{pmatrix} 13 & 2 & 12 \\ 9 & -1 & 9 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ a její charakteristický polynom $p_{\boldsymbol{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:
$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (-1)^n \boldsymbol{A}^n + b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + b_2 \boldsymbol{A}^2 + b_1 \boldsymbol{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}$.

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \boldsymbol{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{M} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{M}$ pro $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n$.

Složky $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n-1$. Koeficienty u $x^{n-1}, \ldots, x^0$ určují $\boldsymbol{C}_{n-1}, \ldots, \boldsymbol{C}_0 \in T^{n\times n}$, čímž dostaneme: $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n) = x^{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1} + \cdots + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0$.

Ukázka:

$$\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_3) = \operatorname{adj}\begin{pmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 3 & -1-x & 3 \\ 1 & -2 & 2-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x + 4 & 2x - 4 & 6 \\ 3x - 3 & x^2 - 3x + 2 & 3x - 3 \\ x - 5 & -2x + 4 & x^2 - 7 \end{pmatrix}$$

$$= x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -7 \end{pmatrix} = x^2 \boldsymbol{C}_2 + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0$$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ a její charakteristický polynom $p_{\boldsymbol{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:
$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (-1)^n \boldsymbol{A}^n + b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + b_2\boldsymbol{A}^2 + b_1\boldsymbol{A} + b_0\mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}$.

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \boldsymbol{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{M} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{M}$ pro $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n$.

Složky $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n-1$. Koeficienty u $x^{n-1}, \dots, x^0$ určují $\boldsymbol{C}_{n-1}, \dots, \boldsymbol{C}_0 \in T^{n\times n}$, čímž dostaneme: $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n) = x^{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1} + \cdots + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0$.

Nyní: $p_{\boldsymbol{A}}(x)\mathbf{I}_n = (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1}x^{n-1}\mathbf{I}_n + \cdots + b_2x^2\mathbf{I}_n + b_1x\mathbf{I}_n + b_0\mathbf{I}_n$
$= (\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)(x^{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1} + x^{n-2}\boldsymbol{C}_{n-2} + \cdots + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0)$
$= -x^n\boldsymbol{C}_{n-1} + x^{n-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{n-1} - \boldsymbol{C}_{n-2}) + \cdots + x(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$

Ukázka:

$$p_{\boldsymbol{A}}(x)\mathbf{I}_n = (-x^3 + 2x^2 + x - 2)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} -x^3+2x^2+x-2 & 0 & 0 \\ 0 & -x^3+2x^2+x-2 & 0 \\ 0 & 0 & -x^3+2x^2+x-2 \end{pmatrix}$$

$$= -x^3\mathbf{I}_3 + 2x^2\mathbf{I}_3 + x\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{I}_3 = (\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)(x^2\boldsymbol{C}_2 + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -7 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -x^3\boldsymbol{C}_2 + x^2(\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2) + x(\boldsymbol{C}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ a její charakteristický polynom
$p_{\boldsymbol{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$ platí:
$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (-1)^n \boldsymbol{A}^n + b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + b_2\boldsymbol{A}^2 + b_1\boldsymbol{A} + b_0\mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}$.

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \boldsymbol{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{M} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{M}$ pro $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n$.

Složky $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n-1$. Koeficienty u $x^{n-1}, \ldots, x^0$ určují $\boldsymbol{C}_{n-1}, \ldots, \boldsymbol{C}_0 \in T^{n\times n}$, čímž dostaneme: $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n) = x^{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1} + \cdots + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0$.

Nyní: $p_{\boldsymbol{A}}(x)\mathbf{I}_n = (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1}x^{n-1}\mathbf{I}_n + \cdots + b_2x^2\mathbf{I}_n + b_1x\mathbf{I}_n + b_0\mathbf{I}_n$
$= (\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)(x^{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1} + x^{n-2}\boldsymbol{C}_{n-2} + \cdots + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0)$
$= -x^n\boldsymbol{C}_{n-1} + x^{n-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{n-1} - \boldsymbol{C}_{n-2}) + \cdots + x(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$

koeficient u x^n:	$(-1)^n\mathbf{I}_n$	$=$	$-\boldsymbol{C}_{n-1}$	$\cdot\boldsymbol{A}^n$ zleva
koeficienty u x^i:	$b_i\mathbf{I}_n$	$=$	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}_{i-1}$	$\cdot\boldsymbol{A}^i$ zleva
koeficient u x^0:	$b_0\mathbf{I}_n$	$=$	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$	ponecháme

Ukázka:
$-x^3\mathbf{I}_3 + 2x^2\mathbf{I}_3 + x\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{I}_3 = -x^3\boldsymbol{C}_2 + x^2(\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2) + x(\boldsymbol{C}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$
$\Rightarrow \quad -\mathbf{I}_3 = -\boldsymbol{C}_2, \quad 2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2, \quad \mathbf{I}_3 = \boldsymbol{C}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1, \quad -2\mathbf{I}_3 = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$

Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ a její charakteristický polynom
$p_{\boldsymbol{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ platí:
$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (-1)^n \boldsymbol{A}^n + b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + b_2\boldsymbol{A}^2 + b_1\boldsymbol{A} + b_0\mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}$.

Důkaz: Použijeme větu, že $(\det \boldsymbol{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{M} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{M}$ pro $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n$.

Složky $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)$ jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v x stupně nejvýše $n-1$. Koeficienty u $x^{n-1}, \ldots, x^0$ určují $\boldsymbol{C}_{n-1}, \ldots, \boldsymbol{C}_0 \in T^{n\times n}$, čímž dostaneme: $\operatorname{adj}(\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n) = x^{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1} + \cdots + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0$.

Nyní: $p_{\boldsymbol{A}}(x)\mathbf{I}_n = (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1}x^{n-1}\mathbf{I}_n + \cdots + b_2x^2\mathbf{I}_n + b_1x\mathbf{I}_n + b_0\mathbf{I}_n$
$= (\boldsymbol{A} - x\mathbf{I}_n)(x^{n-1}\boldsymbol{C}_{n-1} + x^{n-2}\boldsymbol{C}_{n-2} + \cdots + x\boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_0)$
$= -x^n\boldsymbol{C}_{n-1} + x^{n-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{n-1} - \boldsymbol{C}_{n-2}) + \cdots + x(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$

koeficient u x^n:	$(-1)^n\mathbf{I}_n$	$=$	$-\boldsymbol{C}_{n-1}$	$\cdot\boldsymbol{A}^n$ zleva
koeficienty u x^i:	$b_i\mathbf{I}_n$	$=$	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_i - \boldsymbol{C}_{i-1}$	$\cdot\boldsymbol{A}^i$ zleva
koeficient u x^0:	$b_0\mathbf{I}_n$	$=$	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0$	ponecháme

Součet všech: $(-1)^n\boldsymbol{A}^n + b_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + b_2\boldsymbol{A}^2 + b_1\boldsymbol{A} + b_0\mathbf{I}_n = p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})$
$= -\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{C}_{n-1} + \boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_{n-1} - \boldsymbol{C}_{n-2}) + \cdots + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{C}_0) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0 = \mathbf{0}_{n,n}$

Ukázka: $-\mathbf{I}_3 = -\boldsymbol{C}_2$, $2\mathbf{I}_3 = \boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2$, ... $\Rightarrow$ $-\boldsymbol{A}^3 = -\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{C}_2$, ... $\Rightarrow$
$-\boldsymbol{A}^3 + 2\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 2\mathbf{I}_3 = -\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{C}_1 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_0 = \mathbf{0}_{3,3}$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Dosadíme-li matici $2\mathbf{I}_n$ do charakteristického polynomu matice $\mathbf{I}_n$, dostaneme matici:
   a) $\mathbf{0}$, b) $\mathbf{I}_n$, c) $-\mathbf{I}_n$, d) $(-1)^n\mathbf{I}_n$, e) $2\mathbf{I}_n$, f) $2^n\mathbf{I}_n$.
2. Jsou oba součiny $\cdot$ ve výrazu $(\det \boldsymbol{M}) \cdot \mathbf{I}_n = \boldsymbol{M} \cdot \operatorname{adj} \boldsymbol{M}$ stejné binární operace?
   a) ano, b) ne, c) jen pro matice řádu nejvýše 2.
3. Pravda nebo lež?
   Pro každou matici $\boldsymbol{A} \in T^{n\times n}$ jsou matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \ldots, \boldsymbol{A}^n$ a $\mathbf{I}$ lineárně závislé ve vektorovém prostoru $T^{n\times n}$.
4. Charakteristický mnohočlen $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})$ lze zapsat jako $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot q(\boldsymbol{A})$, kde q má menší stupeň než $p_{\boldsymbol{A}}$, pokud je $\boldsymbol{A}$:
   a) regulární, b) singulární, c) symetrická, d) jednotková.

Komentář k řešení kvízu

1. Třeba určit charakteristický polynom $p_{\mathbf{I}_n}(x) = (1 - x)^n$.
   Odtud $p_{\mathbf{I}_n}(2\mathbf{I}_n) = (\mathbf{I}_n - 2\mathbf{I}_n)^n = (-\mathbf{I}_n)^n = (-1)^n\mathbf{I}_n$
2. První je skalární násobek, druhý je maticový součin.
   Jen u řádu 1 tvoří jediný prvek adjungované matice prázdný součin. Ten bývá definován jako jednotkový prvek tělesa.
3. Koeficienty lineární kombinace dokazující lineární závislost jsou podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty koeficienty charakteristického polynomu $p_{\boldsymbol{A}}$.
4. Koeficient b_0 je nulový jen u singulárních matic. b) člen $b_1\boldsymbol{A}$ lze nahradit $b_1\mathbf{I}\boldsymbol{A}$ a pak matici $\boldsymbol{A}$ vytknout.
   Případy a, c) vyvrací např. matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, protože stačí vzít libovolnou regulární symetrickou, která není násobkem $\mathbf{I}$. U $\mathbf{I}$ a jejích násobků lze sice vytknout $\mathbf{I}$, ale tím se stupeň p nesníží.

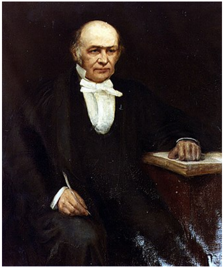
Otázky k porozumění tématu přednášky

- Proč jsou polynomy v adjungované matici někdy o stupeň a někdy o dva menší, než je řád matice?
- Bylo opravdu nutné porovnávat koeficienty u x a nestačilo jen dosadit do neznámé x matici $\boldsymbol{A}$?

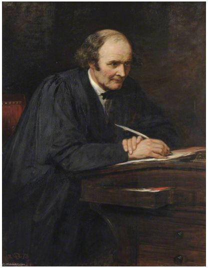
Poznámky k historii

Při studiu vlastností *kvaternionů*, tj. nekomutativního rozšíření komplexních čísel, objevil v roce 1853 W. Hamilton vztah, který odpovídá větě pro některé matice řádu 2 a 4. Jeho žák A. Cayley roku 1858 větu uvedl pro matice a dokázal ji pro řády 2 a 3.

V plné obecnosti větu dokázal až roku 1878 F. Frobenius.



William Rowan Hamilton
1805–1865



Arthur Cayley
1821–1895

Ač univerzitní profesoři a kolegové, oba byli vystudovaní právníci.