

## Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici  $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$  a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Symbol  $\mathbf{0}_{n,n}$  značí nulovou čtvercovou matici řádu  $n$ .

Ukázka:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) &= - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^3 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} 13 & 2 & 12 \\ 9 & -1 & 9 \\ -5 & -2 & -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici  $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$  a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Důkaz: Použijeme větu, že  $\mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M} = (\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n$  pro  $\mathbf{M} = \mathbf{A} - x \mathbf{I}_n$ .

Složky  $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)$  jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v  $x$  stupně nejvýše  $n - 1$ . Koeficienty u  $x^{n-1}, \dots, x^0$  určují  $\mathbf{C}_{n-1}, \dots, \mathbf{C}_0 \in T^{n \times n}$ , čímž dostaneme:  $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n) = x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0$ .

Ukázka:

$$\begin{aligned} \text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_3) &= \text{adj} \begin{pmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 3 & -1-x & 3 \\ 1 & -2 & 2-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x + 4 & 2x - 4 & 6 \\ 3x - 3 & x^2 - 3x + 2 & 3x - 3 \\ x - 5 & -2x + 4 & x^2 - 7 \end{pmatrix} \\ &= x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -7 \end{pmatrix} = x^2 \mathbf{C}_2 + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0 \end{aligned}$$

## Cayleyova-Hamiltonova věta

Věta: Pro matici  $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$  a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

Důkaz: Použijeme větu, že  $\mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M} = (\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n$  pro  $\mathbf{M} = \mathbf{A} - x \mathbf{I}_n$ .

Složky  $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)$  jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v  $x$  stupně nejvýše  $n - 1$ . Koeficienty u  $x^{n-1}, \dots, x^0$  určují  $\mathbf{C}_{n-1}, \dots, \mathbf{C}_0 \in T^{n \times n}$ , čímž dostaneme:  $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n) = x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Nyní máme: } (\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)(x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0) &= p_{\mathbf{A}}(x) \mathbf{I}_n = \\ &= (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1} x^{n-1} \mathbf{I}_n + \dots + b_2 x^2 \mathbf{I}_n + b_1 x \mathbf{I}_n + b_0 \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

Ukázka:

$$\begin{pmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 3 & -1-x & 3 \\ 1 & -2 & 2-x \end{pmatrix} \left( x^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ -3 & 2 & -3 \\ -5 & 4 & -7 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (-x^3 + 2x^2 + x - 2) \mathbf{I}_3 = -x^3 \mathbf{I}_3 + 2x^2 \mathbf{I}_3 + x \mathbf{I}_3 - 2 \mathbf{I}_3$$

# Cayleyova-Hamiltonova věta

**Věta:** Pro matici  $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$  a její charakteristický polynom

$p_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$  platí:

$$p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = \mathbf{0}_{n,n}.$$

**Důkaz:** Použijeme větu, že  $\mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M} = (\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n$  pro  $\mathbf{M} = \mathbf{A} - x \mathbf{I}_n$ .

Složky  $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)$  jsou determinanty podmatic, tj. polynomy v  $x$  stupně nejvýše  $n - 1$ . Koeficienty u  $x^{n-1}, \dots, x^0$  určují  $\mathbf{C}_{n-1}, \dots, \mathbf{C}_0 \in T^{n \times n}$ , čímž dostaneme:  $\text{adj}(\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n) = x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0$ .

$$\begin{aligned} \text{Nyní máme: } (\mathbf{A} - x \mathbf{I}_n)(x^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + x \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0) &= p_{\mathbf{A}}(x) \mathbf{I}_n = \\ &= (-1)^n x^n \mathbf{I}_n + b_{n-1} x^{n-1} \mathbf{I}_n + \dots + b_2 x^2 \mathbf{I}_n + b_1 x \mathbf{I}_n + b_0 \mathbf{I}_n \end{aligned}$$

$$\text{koeficient u } x^n: \quad -\mathbf{C}_{n-1} = (-1)^n \mathbf{I}_n \quad \cdot \mathbf{A}^n \text{ zleva}$$

$$\text{koeficienty u } x^i: \quad \mathbf{A} \mathbf{C}_i - \mathbf{C}_{i-1} = b_i \mathbf{I}_n \quad \cdot \mathbf{A}^i \text{ zleva}$$

$$\text{koeficient u } x^0: \quad \mathbf{A} \mathbf{C}_0 = b_0 \mathbf{I}_n \quad \text{ponecháme a vše } \sum$$

Levá strana:

$$-\mathbf{A}^n \mathbf{C}_{n-1} + \mathbf{A}^{n-1} (\mathbf{A} \mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2}) + \dots + \mathbf{A} (\mathbf{A} \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0) + \mathbf{A} \mathbf{C}_0 = \mathbf{0}_{n,n}$$

$$\text{Pravá strana: } (-1)^n \mathbf{A}^n + b_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + b_2 \mathbf{A}^2 + b_1 \mathbf{A} + b_0 \mathbf{I}_n = p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$$

## Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Dosadíme-li matici  $2\mathbf{I}_n$  do charakteristického polynomu matice  $\mathbf{I}_n$ , dostaneme matici:  
a)  $\mathbf{0}$ , b)  $\mathbf{I}_n$ , c)  $-\mathbf{I}_n$ , d)  $(-1)^n \mathbf{I}_n$ , e)  $2\mathbf{I}_n$ , f)  $2^n \mathbf{I}_n$ .
2. Jsou oba součiny  $\cdot$  ve výrazu  $\mathbf{M} \cdot \text{adj } \mathbf{M} = (\det \mathbf{M}) \cdot \mathbf{I}_n$  stejné binární operace?  
a) ano, b) ne, c) jen pro matice řádu nejvýše 2.
3. Pravda nebo lež?  
Pro každou matici  $\mathbf{A} \in T^{n \times n}$  jsou matice  $\mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$  a  $\mathbf{I}$  lineárně závislé ve vektorovém prostoru  $T^{n \times n}$ .
4. Charakteristický mnohočlen  $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$  lze zapsat jako  $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot q(\mathbf{A})$ , kde  $q$  má menší stupeň než  $p_{\mathbf{A}}$ , pokud je  $\mathbf{A}$ :  
a) regulární, b) singulární, c) symetrická, d) jednotková.

## Komentář k řešení kvízu

1. Třeba určit charakteristický polynom  $p_{\mathbf{I}_n}(x) = (1 - x)^n$ .  
Odtud  $p_{\mathbf{I}_n}(2\mathbf{I}_n) = (\mathbf{I}_n - 2\mathbf{I}_n)^n = (-\mathbf{I}_n)^n = (-1)^n \mathbf{I}_n$
2. První je maticový součin, druhý je skalární násobek.  
Jen u řádu 1 tvoří jediný prvek adjungované matice prázdný součin. Ten bývá definován jako jednotkový prvek tělesa.
3. Koeficienty lineární kombinace dokazující lineární závislost jsou podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty koeficienty charakteristického polynomu  $p_{\mathbf{A}}$ .
4. Koeficient  $b_0$  je nulový jen u singulárních matic. b) člen  $b_1 \mathbf{A}$  lze nahradit  $b_1 \mathbf{I} \mathbf{A}$  a pak matici  $\mathbf{A}$  vytknout.  
Případy a, c) vyvrací např. matice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , protože stačí vzít libovolnou regulární symetrickou, která není násobkem  $\mathbf{I}$ . U  $\mathbf{I}$  a jejích násobků lze sice vytknout  $\mathbf{I}$ , ale tím se stupeň  $p$  nesníží.

## Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Proč jsou polynomy v adjungované matici někdy o stupeň a někdy o dva menší, než je řád matice?
- ▶ Bylo opravdu nutné porovnávat koeficienty u  $x$  a nestačilo jen dosadit do neznámé  $x$  matici  $A$ ?

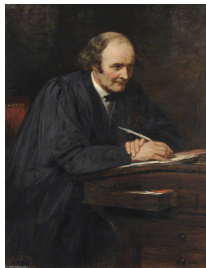
## Poznámky k historii

Při studiu vlastností *kvaternionů*, tj. nekomutativního rozšíření komplexních čísel, objevil v roce 1853 W. Hamilton vztah, který odpovídá větě pro některé matice řádu 2 a 4. Jeho žák A. Cayley roku 1858 větu uvedl pro matice a dokázal ji pro řády 2 a 3.

V plné obecnosti větu dokázal až roku 1878 F. Frobenius.



William Rowan Hamilton  
1805–1865



Arthur Cayley  
1821–1895

Ač univerzitní profesoři a kolegové, byli oba vystudovaní právníci.