Úlohy k 12. cvičení

1. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Mějme dánu reálnou kvadratickou formu $g((x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + ax_2x_3 + 5x_3^2$.

   Pro které hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ je tato forma pozitivně definitní (t.j. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0} : g(u) > 0$) a pro které hodnoty je negativně definitní (t.j. $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0} : g(u) < 0$)?

3. Určete parametry $a, b \in T$ aby pro každou kvadratickou formu g na V nad T a libovolné tři vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ platilo:

   $g(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = ag(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + ag(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) + ag(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + bg(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{v}) + bg(\boldsymbol{w})$

4. Najděte polární bázi kvadratické formy na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, jejíž analytické vyjádření vůči standardní bázi je $g((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = 2x^2 + 3xy + xz + 4y^2 + yz$.

5. Nechť vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ reprezentuje n pozorování, tedy tzv. výběr.

   Rozptyl výběru je definován jako $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$, kde $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ je výběrový průměr.

   Ukažte, že σ^2 je kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ a určete matici této formy.