Úlohy k 11. cvičení

1. Nechť $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ je matice bilineární formy na prostoru T^3. Určete analytické vyjádření této formy i příslušné kvadratické formy. Najděte symetrickou matici, která vyjadřuje tutéž kvadratickou formu. (Vše vůči stejné bázi.)

   a) řešte pro $T = \mathbb{R}$.

   b) řešte pro $T = \mathbb{Z}_2$ (číslo 2 v $\mathbb{Z}_2$ odpovídá 0).

   c) řešte pro $T = \mathbb{Z}_3$.

2. Kvadratická forma g na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ má vzhledem ke standardní bázi E analytické vyjádření $g(\boldsymbol{u}) = 2x^2+2xy-y^2-2yt-t^2$, kde $u = (x, y, z, t)^{\mathrm{T}}$. Najděte její analytické vyjádření vzhledem k bázi: $B = \{(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, (1,1,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,1,0,0)^{\mathrm{T}}, (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}\}$.

   Určete $g(\boldsymbol{u})$ pro vektor $\boldsymbol{u}$, který má vůči bázi B souřadnice $[\boldsymbol{u}]_B = (3,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

3. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ rozhodněte, zda existuje kvadratická forma g, pro kterou platí: $g((1,0,0)^{\mathrm{T}}) = 1$, $g((0,1,0)^{\mathrm{T}}) = 2$, $g((0,0,1)^{\mathrm{T}}) = 3$, $g((1,0,1)^{\mathrm{T}}) = 4$, $g((1,1,0)^{\mathrm{T}}) = 5$, $g((0,1,1)^{\mathrm{T}}) = 6$ a $g((1,1,1)^{\mathrm{T}}) = 7$.

   Pokud ano, nalezněte matici symetrické bilineární formy, ze které je odvozena.

4. Určete signaturu reálné kvadratické formy dané maticí

   a) $\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

5. Určete signaturu reálné kvadratické formy

   a) $g((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$

   b) $g((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = x^2 + 6xy + 4xz + 9y^2 + 12yz + 4z^2$

   c) $g((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_4 - x_4^2$

   d) $g((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

   e) $g((x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

6. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu formy s maticí

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Určete parametry $a, b \in T$ aby pro každou kvadratickou formu g na V nad T a libovolné tři vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ platilo:

   $g(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = ag(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) + ag(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}) + ag(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) + bg(\boldsymbol{u}) + bg(\boldsymbol{v}) + bg(\boldsymbol{w})$