Úlohy k 8. cvičení

1. Pomocí Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti ukažte, že pro libovolná reálná čísla $a_1, \dots, a_5$ platí: $4a_1 + 3a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 2a_5 \leq 9\sqrt{a_1^2 + \dots + a_5^2}$

2. Mějme dva kolmé vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Dále nechť $\|\boldsymbol{u}\| = 12, \|\boldsymbol{v}\| = 5$. Určete $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|$ a $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$.

3. Nechť $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$, $\mathbf{b}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$, $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T$, jsou vektory v reálném aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem.

   - Ověřte, že $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ je ortonormální báze $\mathbb{R}^3$,
   - spočítejte souřadnice vektorů $(0, 0, 1)^T$, $(2, 1, 0)^T$ a $(1, 2, 3)^T$ vzhledem k ortonormální bázi B,
   - určete ortogonální projekce vektorů $(0, 0, 1)^T$ a $(2, 1, 0)^T$ do podprostoru span$(\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\})$

4. V prostoru $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$ určete podle Gramova-Schmidtova předpisu ortonormální bázi $Z = \{\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_r\}$ řádkového prostoru následujících matic.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

5. Rozšiřte ortonormální báze z předchozí úlohy na ortonormální báze $\mathbb{R}^4$.

6. Pro matice z předchozí úlohy určete ortogonální projekci $\boldsymbol{p}$ vektoru $\boldsymbol{a} = (2, 2, 1, 5)^T$ do řádkového prostoru příslušné matice a souřadnice této projekce $[\boldsymbol{p}]_Z$ vzhledem k bázi Z.

7. Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = (10, 5, 13, 9)^T$$

   Všimněte si, že sloupce matice $\boldsymbol{A}$ jsou vzájemně kolmé.