Úlohy k 6. cvičení

1. Ukažte jednoduchým způsobem, že Cayleyova-Hamiltonova věta platí pro diagonalizovatelné matice.

2. Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Odvoďte vztah mezi $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ a $\det(\boldsymbol{A})$.

4. Rozhodněte, jestli jsou následující matice unitární.

   a) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Řešení úloh k 6. cvičení

1. *Ukažte jednoduchým způsobem, že Cayleyova-Hamiltonova věta platí pro diagonalizovatelné matice.*

   Předpokládejme, že $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^{-1}$, kde $\boldsymbol{D}$ je diagonální.

   Každá mocnina $\boldsymbol{D}^k$ diagonální matice $\boldsymbol{D}$ je diagonální a má na diagonále $(\boldsymbol{D}^k)_{jj} = d_{jj}^k$ neboli mocniny vlastních čísel d_{jj}.

   Pro $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=0}^{n} b_i \boldsymbol{A}^i$ platí

   $$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^{-1}) = \sum_{i=0}^{n} b_i(\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{R}^{-1})^i = \sum_{i=0}^{n} b_i \boldsymbol{R}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}\Big(\sum_{i=0}^{n} b_i\boldsymbol{D}^i\Big)\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{0}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{0}$$

   protože matice $\sum_{i=0}^{n} b_i\boldsymbol{D}^i$ má na diagonále jako j-tý prvek $p_{\boldsymbol{A}}(d_{jj}) = 0$.

2. *Následující matici převeďte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.*

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Zobecněný vlastní vektor $\boldsymbol{x}_i$ lze získat ze soustavy $(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_{i-1}$.

   Charakteristický mnohočlen $p_{\boldsymbol{A}}(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)^2$.

   Soustava $(\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{0}$ má řešení $\boldsymbol{x}^1 = p(1,0,1)^T$.

   Vlastní číslo $\lambda = 2$ má tedy geometrickou násobnost 1 a algebraickou 2, musíme tedy hledat zobecněný vlastní vektor. V daších výpočtech budeme pracovat s volbou $p = 1$, čili $\boldsymbol{x}^1 = (1,0,1)^T$.

   Zobecněný vlastní vektor $\boldsymbol{x}^2$ získáme ze soustavy $(\boldsymbol{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1$. Její řešení je $\boldsymbol{x}^2 = q(1,0,1)^T + (-1,0,0)^T$.

   Soustava $(\boldsymbol{A} - 1\mathbf{I})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ má řešení $\boldsymbol{x}^3 = r(2,-1,1)^T$.

   Vhodnou volbou parametrů $q = 1$ a $r = 1$ získáme hledanou matici $\boldsymbol{R}$. Také vypočteme její inverzi $\boldsymbol{R}^{-1}$.

   $$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Danou matici lze zapsat pomocí Jordanova normálního tvaru např. jako

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{J}\boldsymbol{R}^{-1}$$

   b) Matice má jediné vlastní číslo $\lambda = 2$ s algebraickou násobností 4, vlastní vektory jsou nenulová řešení soustavy rovnic s maticí

   $$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimenze $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ je rovna 2, takže matice $\mathbf{A}$ má k vlastnímu číslu dva lineárně nezávislé vlastní vektory, volíme např. $\mathbf{x}_1 = (0,0,1,0)^T$ a $\mathbf{x}_2 = (1,0,0,0)^T$

Pro sestavení regulární matice $\mathbf{R}$ potřebujeme najít ještě další dva zobecněné vlastní vektory. Ty hledáme tak, že místo soustavy $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ dosadíme za pravou stranu vlastní vektor (případně v dalším kroku pak zobecněný vlastní vektor), tedy řešíme soustavu s rozšířenou maticí (pro $\mathbf{x}_1$) $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ která nemá řešení (viz. druhý a třetí řádek). Z toho odvodíme, že tomuto vlastnímu vektoru bude odpovídat Jordanova buňka velikosti 1.

Pro druhý vlastní vektor $\mathbf{x}_2$ tím pádem musíme dopočítat dva zobecněné vlastní vektory a druhá Jordanovu buňku bude mít velikost 3. Počítáme podobně jako v předchozím případě, pravou stranu zvolíme $\mathbf{x}_2$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Množina řešení je afinní podprostor dimenze 2, přesněji vektory ve tvaru $(p,1,q,0)^T$. Zvolíme $p = q = -1$ a tak $\mathbf{x}_3 = (-1,1,-1,0)^T$.

Dále vezmeme $\mathbf{x}_3$ jako pravou stranu již mnohokrát řešené soustavy a pokračujeme

$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ s (pro další výpočet pěkným) řešením $\mathbf{x}_4 = (0,0,0,-\frac{1}{2})^T$

Nyní můžeme sestavit matice $\mathbf{J}$ a $\mathbf{R}$ a poté dopočítat $\mathbf{R}^{-1}$

Uvedený výpočet nedává obecný návod pro nalezení Jordanova rozkladu, protože je třeba zajistit lineární nezávislost vektorů z různých řetízků. Zde to bylo zaručeno tím, že jedna z buněk měla velikost 1. Obecný korektní postup je předveden v následující variantě.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Matice má jediné vlastní číslo $\lambda = 0$ s algebraickou násobností 5.

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je rovna 3, takže $\dim(\ker A) = 2$ a máme dva lineárně nezávislé vlastní vektory.

Kdybychom chtěli k vlastnímu vektoru $\mathbf{x}_1$ dopočítat zobecněný vlastní vektor $\mathbf{x}_2$, znamenalo by to řešit rovnici $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$, což lze nahlédnout (po úpravě) jako hledání řešení rovnice $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. Neboli, $\mathbf{x}_2 \in \ker((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2) \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ atd. pro další vektory v řetízku zobecněných vlastních vektorů.

Pro náš případ s $\lambda = 0$ spočteme $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Je patrné, že $\dim(\ker \mathbf{A}^2) = 4$ a $\dim(\ker \mathbf{A}^3) = 5$, takže bude existovat jeden lineárně nezávislý vektor v $\ker \mathbf{A}^3 \setminus \ker \mathbf{A}^2$, např. $x_3 = (0,0,0,0,1)^T$. Ten by měl splňovat $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2$, tedy dopočteme $\mathbf{x}_2 = (-1,0,-1,1,0)^T$ a $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = (0,0,1,0,0)^T$ (což je vlastní vektor matice $\mathbf{A}$). Tím jsme určili jednu Jordanovu buňku velikosti 3.

Druhá buňka bude mít velikost 2 a opět ji budeme počítat od konce řetízku, tedy zobecněného vlastního vektoru $\mathbf{y}_2$. Pro ten musí platit $\mathbf{y}_2 \in \ker \mathbf{A}^2 \setminus \ker \mathbf{A}$ a je lineárně nezávislý na $\mathbf{x}_2$. Zvolíme např. $\mathbf{y}_2 = (0,1,0,0,0)^T$ a dopočteme $\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_2 = (1,0,0,0,0)^T$ (opět vlastní vektor $\mathbf{A}$).

Nyní můžeme sestavit matice $\mathbf{R}$ (sloupce jsou po řadě $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$) a $\mathbf{J}$ a dopočítat inverzní matici $\mathbf{R}^{-1}$

3. *Odvoďte vztah mezi* $\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ *a* $\det(\boldsymbol{A})$.

$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = \overline{\det(\boldsymbol{A})}$ protože normální transpozicí se determinant nezmění. Poté všechny prvky matice neboli členy v rozvoji determinantu nahradíme komplexně sdruženými čísly. V komplexním oboru platí $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ a také $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$.

Formálně např.:

$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}) = \sum\limits_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod\limits_{i=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})_{i,p(i)} = \sum\limits_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod\limits_{i=1}^{n} \overline{a_{p(i),i}} = \overline{\sum\limits_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \prod\limits_{i=1}^{n} a_{p(i),i}} = \overline{\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})} = \overline{\det(\boldsymbol{A})}$

4. *Rozhodněte, jestli jsou následující matice unitární.*

a) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1+i}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$