Úlohy k 2. cvičení

1. V oboru reálných čísel určete hodnotu následujícího determinantu:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 & \dots & n-1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 1-n & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Rozviňte determinanty následujících reálných matic s parametry:
$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & a \\ 2 & -2 & 1 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \\ -1 & 2 & -1 & d \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & c & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} a & -1 & -1 & -1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & -1 \\ 0 & b & -1 & 1 \\ 1 & -1 & c & 0 \\ -1 & 1 & 0 & d \end{pmatrix}$$

3. Určete determinanty následujících matic:
$$S_n = \begin{pmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+x & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+x \end{pmatrix}, \qquad T_{n+1} = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

4. Určete determinanty následujících matic:
$$\text{a)} \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ \sin y & \cos y & 1 \\ \sin z & \cos z & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \cos y & \sin x \sin y \\ -\sin x & \cos x \cos y & \cos x \sin y \\ 0 & -\sin y & \cos y \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & \log_b a & \log_c a \\ \log_a b & 1 & \log_c b \\ \log_a c & \log_b c & 1 \end{pmatrix}$$

5. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu dokažte, že determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ je dělitelný 17.

6. Aniž byste rozvinuli oba determinanty, dokažte, že platí:
$$\det \begin{pmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Pomocí Cramerova pravidla vyřešte soustavu:
$$\text{a) v } \mathbb{R}\text{:} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{b) v } \mathbb{Z}_5\text{:} \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$