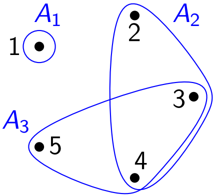
Množinové systémy s omezeními na mohutnosti

Problém: Kolik podmnožin může mít n-prvková množina, pokud každá podmnožina má mít lichou velikost, ale průnik každé dvojice různých podmnožin má mít sudou velikost?

Formálně:
$\max k : \exists A_1, \ldots, A_k \subseteq \{1, \ldots, n\}\ \forall i \neq j : 2 \nmid |A_i| \wedge 2 \mid |A_i \cap A_j|$

Ukázka: $n = 5, k = 3$

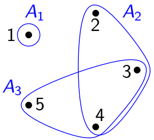


Věta: Vždy platí, že $k \leq n$, neboli existuje nejvýše n podmnožin $A_1, \ldots, A_n$ předepsaných vlastností (například jednoprvkových).

Důkaz, že $k \leq n$

Sestrojíme tzv. *matici incidence* $\boldsymbol{M} \in \mathbb{Z}_2^{k \times n}$ předpisem:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } j \in A_i \\ 0 & \text{pokud } j \notin A_i \end{cases}.$$

Pro 

máme:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice splňuje $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I}_k$, protože nad $\mathbb{Z}_2$ máme:

$$(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathsf{T}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \text{ protože toto je } \textit{parita } |A_i|, \\ 0 & \text{pro } i \neq j, \text{ protože toto je } \textit{parita } |A_i \cap A_j|. \end{cases}$$

Nyní $k = \operatorname{rank}(\mathbf{I}_k) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathsf{T}}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{M}) \leq n$

Poznámka: Pokud zvolíme $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{k \times n}$, pak $(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{\mathsf{T}})_{ij} = |A_i \cap A_j|$.