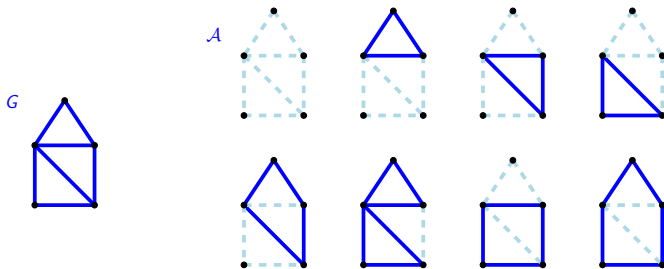


Sudé podgrafy

Nechť G je souvislý graf a \mathcal{A} obsahuje množiny hran A takové, že každý vrchol G náleží sudému počtu hran v A .

Tyto množiny A určují tzv. *sudé podgrafy* G .

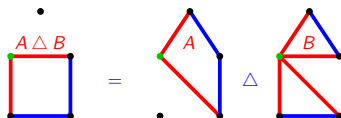


Problém: Kolik sudých podgrafů obsahuje G ?

Vektorový prostor sudých podgrafů

Symetrický rozdíl \triangle zachovává sudé stupně, protože symetrický rozdíl dvou množin **sudé** mohutnosti, konkrétně **hran** incidentních s **vrcholem**, má také **sudou** mohutnost.

$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$



Proto $(\mathcal{A}, \triangle, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad \mathbb{Z}_2 .

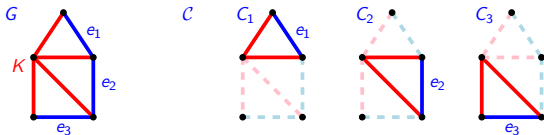
Pro prostory konečné mohutnosti platí $|\mathcal{A}| = |T|^{\dim(\mathcal{A})}$.

Ekvivalentní problém: Sestrojte bázi \mathcal{A} .

Konstrukce báze \mathcal{C}

Pro libovolnou kostru K grafu G označme $\{e_1, \dots, e_k\} = E_G \setminus E_K$.
Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ určíme unikátní cyklus C_i v grafu $K \cup e_i$.

Množina $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ je *lineárně nezávislá*, neboť pro každé i platí, že hrana e_i patří do C_i , ale nelze ji eliminovat symetrickým rozdílem C_i s ostatními cykly z \mathcal{C} , neboť ty e_i neobsahují.



Konstrukce báze \mathcal{C}

Pro libovolnou kostru K grafu G označme $\{e_1, \dots, e_k\} = E_G \setminus E_K$.
Pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$ určíme unikátní cyklus C_i v grafu $K \cup e_i$.

Množina $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ je *lineárně nezávislá*, neboť pro každé i platí, že hrana e_i patří do C_i , ale nelze ji eliminovat symetrickým rozdílem C_i s ostatními cykly z \mathcal{C} , neboť ty e_i neobsahují.

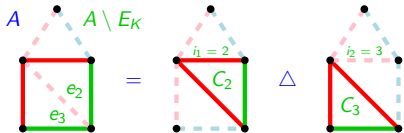
Pro libovolný sudý podgraf A označme $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_j}\} = A \setminus E_K$,
čili $i_1, \dots, i_j \in \{1, \dots, k\}$ jsou indexy hran z A mimo kostru K .

Graf $A \triangle C_{i_1} \triangle C_{i_2} \triangle \dots \triangle C_{i_j}$ je sudým podgrafem G ,
ale také je podgrafem K , neboť nemá žádnou hranu z $E_G \setminus E_K$.
Strom nemá žádné cykly, tudíž $A \triangle C_{i_1} \triangle C_{i_2} \triangle \dots \triangle C_{i_j} = 0$.

Úpravou rovnosti lze získat

$$A = C_{i_1} \triangle C_{i_2} \triangle \dots \triangle C_{i_j}.$$

Proto \mathcal{C} *generuje* \mathcal{A} .



Dostáváme: $\dim(\mathcal{A}) = |\mathcal{C}| = k = |E_G| - |E_K| = |E_G| - |V_G| + 1$.

Odpověď: Každý souvislý graf G má $2^{|E_G| - |V_G| + 1}$ sudých podgrafů.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Jaká je dimenze prostoru sudých podgrafů úplného grafu K_{10} ?
a) 9, b) 10, c) 35, d) **36**, e) 45, f) 46, g) 55, h) 80, i) 90.
2. Pravda nebo lež:
Každá báze prostoru sudých podgrafů je složena jen z cyklů.
3. Kolik sudých podgrafů má nesouvislý graf G se třemi komponentami souvislosti?
a) $\frac{1}{3}2^{|E_G|-|V_G|}$, c) $3 \cdot 2^{|E_G|-|V_G|}$, e) $(2^{|E_G|-|V_G|+1})^3$,
b) $\frac{1}{8}2^{|E_G|-|V_G|}$, d) **$8 \cdot 2^{|E_G|-|V_G|}$** , f) $(2^{|E_G|-|V_G|+1})^8$.

Komentář k řešení kvízu

1. Graf K_{10} má $\binom{10}{2} = 45$ hran a každá jeho kostra 9.
Dimenze odpovídá počtu nekostrových hran $45 - 9 = 36$.
2. Podle věty o výměně lze vektor báze nahradit lineární kombinací tohoto vektoru s ostatními a už nemusí být cyklus, např. u dvou disjunktních cyklů.
3. Podgraf daný sjednocením koster jednotlivých komponent v grafu s c komponentami má celkem $|V_G| - c$ hran.
Odtud je počet všech sudých podgrafů roven $2^{|E_G| - |V_G| + c}$.
Alternativě lze vynásobit počty v jednotlivých komponentách.