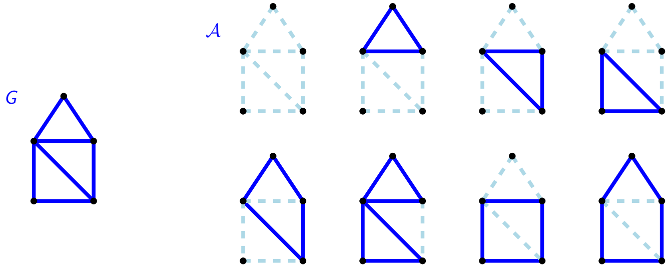
Sudé podgrafy

Nechť G je souvislý graf a $\mathcal{A}$ obsahuje množiny hran A takové, že každý vrchol G náleží sudému počtu hran v A.
Tyto množiny A určují tzv. *sudé podgrafy* G.

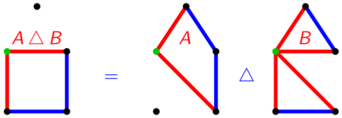


Problém: Kolik sudých podgrafů obsahuje G?

Vektorový prostor sudých podgrafů

Symetrický rozdíl $\triangle$ zachovává sudé stupně,
protože symetrický rozdíl dvou množin sudé mohutnosti,
konkrétně hran incidentních s vrcholem, má také sudou mohutnost.

$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$



Proto $(\mathcal{A}, \triangle, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$.

Pro prostory konečné mohutnosti platí $|\mathcal{A}| = |T|^{\dim(\mathcal{A})}$.

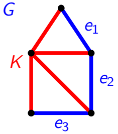
Ekvivalentní problém: Sestrojte bázi $\mathcal{A}$.

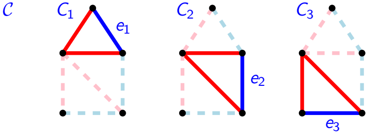
Konstrukce báze C

Zvolme libovolnou kostru K grafu G.

Pro každý $e_i \in E_G \setminus E_K$ definujme C_i jako unikátní cyklus z $K \cup e$.

Množina $\mathcal{C} = \{C_i : e_i \in E_G \setminus E_K\}$ je *lineárně nezávislá*, protože hrana e_i nemůže být eliminována symetrickým rozdílem C_i s ostatními cykly z $\mathcal{C}$, neboť ty e_i neobsahují.





Konstrukce báze $\mathcal{C}$

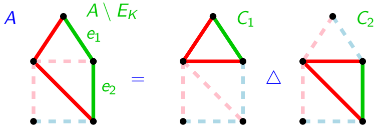
Zvolme libovolnou kostru K grafu G.

Pro každý $e_i \in E_G \setminus E_K$ definujme C_i jako unikátní cyklus z $K \cup e$.

Množina $\mathcal{C} = \{C_i : e_i \in E_G \setminus E_K\}$ je *lineárně nezávislá*, protože hrana e_i nemůže být eliminována symetrickým rozdílem C_i s ostatními cykly z $\mathcal{C}$, neboť ty e_i neobsahují.

Pro libovolný sudý podgraf A označme $A \setminus E_K = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$.
Graf $A \triangle C_{i_1} \triangle C_{i_2} \triangle \cdots \triangle C_{i_k}$ je sudým podgrafem G,
ale také je podgrafem K, neboť nemá žádnou hranu z $E_G \setminus E_K$.
Strom nemá žádné cykly, tudíž $A \triangle C_{i_1} \triangle C_{i_2} \triangle \cdots \triangle C_{i_k} = \mathbf{0}$.

Odtud $A = C_{i_1} \triangle C_{i_2} \triangle \cdots \triangle C_{i_k}$. Dostáváme, že $\mathcal{C}$ *generuje* $\mathcal{A}$.



Dostáváme $\dim(\mathcal{A}) = |\mathcal{C}| = |E_G| - |E_K| = |E_G| - |V_G| + 1$.

Odpověď: Každý souvislý graf G má $2^{|E_G|-|V_G|+1}$ sudých podgrafů.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Jaká je dimenze prostoru sudých podgrafů úplného grafu K_{10}?
   a) 9, b) 10, c) 35, d) 36, e) 45, f) 46, g) 55, h) 80, i) 90.
2. Pravda nebo lež:
   Každá báze prostoru sudých podgrafů je složena jen z cyklů.
3. Kolik sudých podgrafů má nesouvislý graf G se třemi komponentami souvislosti?
   a) $\frac{1}{3}2^{|E_G|-|V_G|}$, c) $3 \cdot 2^{|E_G|-|V_G|}$, e) $(2^{|E_G|-|V_G|+1})^3$,
   b) $\frac{1}{8}2^{|E_G|-|V_G|}$, d) $8 \cdot 2^{|E_G|-|V_G|}$, f) $(2^{|E_G|-|V_G|+1})^8$.

Komentář k řešení kvízu

1. Graf K_{10} má $\binom{10}{2} = 45$ hran a každá jeho kostra 9.
   Dimenze odpovídá počtu nekostrových hran $45 - 9 = 36$.
2. Podle věty o výměně lze vektor báze nahradit lineární kombinací tohoto vektoru s ostatními a už nemusí být cyklus, např. u dvou disjunktních cyklů.
3. Podgraf daný sjednocením koster jednotlivých komponent v grafu s c komponentami má celkem $|V_G| - c$ hran.
   Odtud je počet všech sudých podgrafů roven $2^{|E_G|-|V_G|+c}$.
   Alternativě lze vynásobit počty v jednotlivých komponentách.