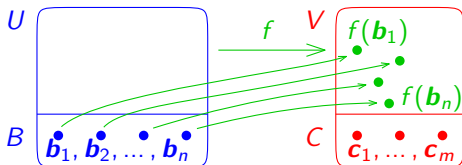


Matice lineárního zobrazení

Definice: Necht' U a V jsou vektorové prostory nad tělesem T s uspořádanými bázemi $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ a $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m)$.

Matice lineárního zobrazení $f : U \rightarrow V$ vzhledem k bázím B a C je $[f]_{B,C} \in T^{m \times n}$, jejíž sloupce jsou vektory souřadnic obrazů vektorů báze B vzhledem k bázi C .

Formálně: $[f]_{B,C} = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline [f(\mathbf{b}_1)]_C & \dots & [f(\mathbf{b}_n)]_C \\ \hline & & \end{array} \right)$.



$$[f]_{B,C} = ([f(\mathbf{b}_1)]_C, \dots, [f(\mathbf{b}_n)]_C)$$

Použití matice lineárního zobrazení

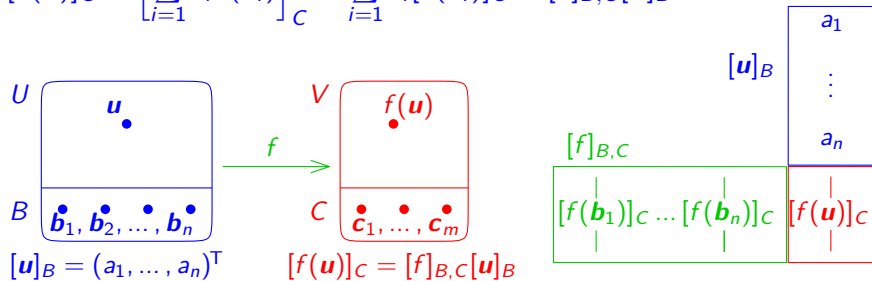
Matice zobrazení je $[f]_{B,C} = ([f(\mathbf{b}_1)]_C, \dots, [f(\mathbf{b}_n)]_C)$.

Pozorování: Pro libovolné $\mathbf{u} \in U$ platí: $[f(\mathbf{u})]_C = [f]_{B,C}[\mathbf{u}]_B$.

Důkaz: Necht' $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i$, neboli $[\mathbf{u}]_B = (a_1, \dots, a_n)^T$.

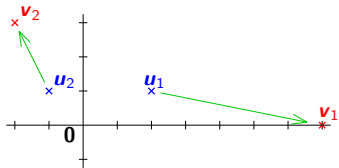
Potom $f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\mathbf{b}_i)$, a tudíž i:

$$[f(\mathbf{u})]_C = \left[\sum_{i=1}^n a_i f(\mathbf{b}_i) \right]_C = \sum_{i=1}^n a_i [f(\mathbf{b}_i)]_C = [f]_{B,C} [\mathbf{u}]_B.$$



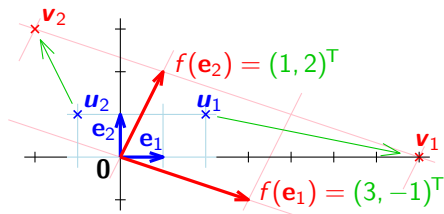
Matice lineárního zobrazení v rovině

Vzhledem ke standardní bázi E určete matici zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí $u_1 = (2, 1)^T$ na $v_1 = (7, 0)^T$ a $u_2 = (-1, 1)^T$ na $v_2 = (-2, 3)^T$.



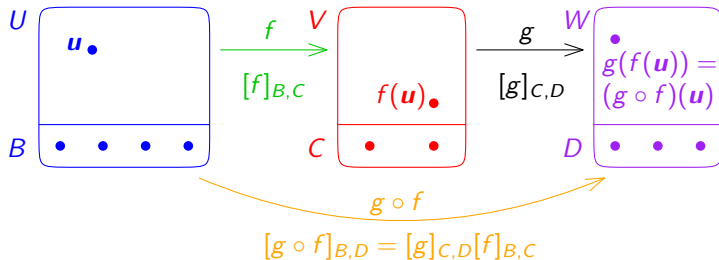
Matice musí splňovat $[f]_{E,E}[u_i]_E = [v_i]_E$ pro $i \in \{1, 2\}$ neboli:

$$[f]_{E,E} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow [f]_{E,E} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$



Složení lineárních zobrazení

Pozorování: Mějme vektorové prostory U, V a W s konečnými uspořádanými bázemi B, C a D . Pro matice lineárních zobrazení $f : U \rightarrow V$ a $g : V \rightarrow W$ platí vztah: $[g \circ f]_{B,D} = [g]_{C,D}[f]_{B,C}$



Důkaz: Pro všechny $u \in U$: $[(g \circ f)(u)]_D = [g \circ f]_{B,D}[u]_B$, také: $[(g \circ f)(u)]_D = [g(f(u))]_D = [g]_{C,D}[f(u)]_C = [g]_{C,D}[f]_{B,C}[u]_B$.

Dosadíme-li za u i -tý vektor báze B , máme $[u]_B = e_i$ a ze vztahu $[g \circ f]_{B,D} e_i = ([g]_{C,D}[f]_{B,C}) e_i$ plyne, že matice mají i -té sloupce shodné. Proto platí $[g \circ f]_{B,D} = [g]_{C,D}[f]_{B,C}$.

Matice přechodu

Definice: Necht' B a C jsou dvě konečné uspořádané báze vektorového prostoru U .

Matice přechodu od B k C je $[id]_{B,C}$.

Pozorování: Pro každé $u \in U$ platí:

$$[u]_C = [id(u)]_C = [id]_{B,C}[u]_B.$$

Pozorování: Protože $[id]_{C,B}[id]_{B,C} = [id]_{B,B} = I$,

je každá matice přechodu regulární a platí: $[id]_{C,B} = ([id]_{B,C})^{-1}$.

Postup: Výpočet matice přechodu $[id]_{B,C}$ od báze B k C v T^n :

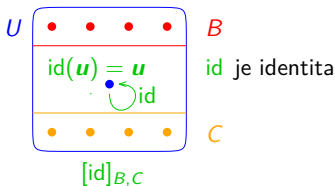
Pro $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ položme $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

Pro $u \in T^n$: $u = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{b}_i = \mathbf{B}[u]_B$, kde $[u]_B = (a_1, \dots, a_n)^T$,

a obdobně $u = \sum_{i=1}^n d_i \mathbf{c}_i = \mathbf{C}[u]_C$ pro $[u]_C = (d_1, \dots, d_n)^T$.

Z $u = \mathbf{B}[u]_B = \mathbf{C}[u]_C$ plyne: $[u]_C = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}[u]_B = [id]_{B,C}[u]_B$.

Trik: Součin lze ušetřit: $(\mathbf{C}|\mathbf{B}) \sim (\mathbf{I}|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}) = (\mathbf{I}|[id]_{B,C})$.



Ukázka

V prostoru \mathbb{Z}_5^4 určete matici přechodu

od $B = ((2, 3, 0, 2)^T, (1, 1, 1, 1)^T, (2, 0, 3, 3)^T, (1, 4, 2, 0)^T)$

k $C = ((1, 2, 0, 1)^T, (2, 0, 3, 3)^T, (3, 1, 4, 1)^T, (4, 2, 0, 1)^T)$.

Vytvoříme matici, sloupce na levé straně jsou z C , vpravo z B .

Gaussovou-Jordanovou eliminací převedeme levou stranu na I .

Vpravo se pak objeví matice přechodu $[id]_{B,C}$, čili od B k C .

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Matice přechodu od báze B k bázi C je $[id]_{B,C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Charakterizace zobrazení pomocí matic

Lemma: Lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ mezi prostory

U a V s libovolnými konečnými bázemi B a C

▶ je prosté, právě když $\text{rank}([f]_{B,C}) = \dim U$.

▶ je na, právě když $\text{rank}([f]_{B,C}) = \dim V$,

The diagram illustrates the mapping of a vector u from space U to space V via a linear map f , resulting in vector v . The matrix $[f]_{B,C}$ is shown below the mapping. The vector u is represented as a column vector in a box labeled U , and the vector v is represented as a column vector in a box labeled V . The mapping is indicated by an arrow labeled f . The matrix $[f]_{B,C}$ is shown below the mapping, with the equation $[f]_{B,C}[u]_B = [v]_C$ written below it.

Důkaz: Vektory u takové, že $f(u) = v$, odpovídají vzájemně jednoznačně řešením x soustavy $[f]_{B,C}x = [v]_C$, volbou $x = [u]_B$.

▶ Soustava má pro každé $v \in V$ nejvýše jedno řešení, právě když soustava $[f]_{B,C}x = 0$ nemá žádné volné proměnné, t.j. právě když $\text{rank}([f]_{B,C})$ je rovno počtu sloupců, čili $\dim U$.

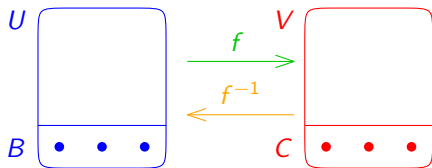
▶ Soustava má řešení pro každé $v \in V$, právě když $\text{rank}([f]_{B,C})$ je rovno počtu řádků, čili $\dim V$. (Vpravo není nikdy pivot.)

Věta: Lineární zobrazení $f : U \rightarrow V$ je isomorfismus prostorů U a V s konečnými bázemi B a C , právě když $[f]_{B,C}$ je regulární.

Důsledek: Pro isomorfismus f platí: $[f^{-1}]_{C,B} = ([f]_{B,C})^{-1}$, neboť matice $[f]_{B,C}$ je čtvercová a splňuje $[f^{-1}]_{C,B}[f]_{B,C} = [\text{id}]_{B,B} = \mathbf{I}$.

Bonus: Stručný důkaz věty bez využití soustav

Věta: Lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ je isomorfismus prostorů U a V s konečnými bázemi B a C , právě když $[f]_{B,C}$ je regulární.



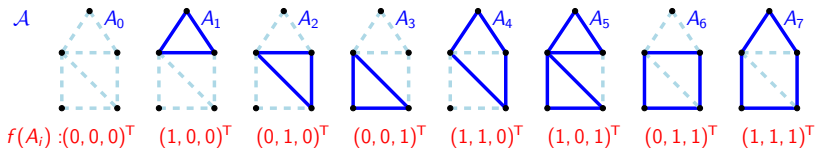
Důkaz:

\Leftarrow : Uvažme $g: V \rightarrow U$ takové, že $[g]_{C,B} = ([f]_{B,C})^{-1}$. Pak:
 $[g \circ f]_{B,B} = ([f]_{B,C})^{-1}[f]_{B,C} = \mathbf{I}_{|B|} = [\text{id}]_{B,B} \Rightarrow f$ je prosté,
 $[f \circ g]_{C,C} = [f]_{B,C}([f]_{B,C})^{-1} = \mathbf{I}_{|C|} = [\text{id}]_{C,C} \Rightarrow f$ je na.

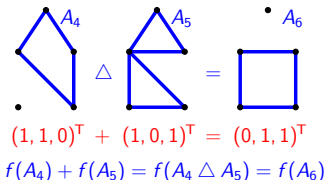
\Rightarrow : Protože $f(U) = V$ a $f^{-1}(V) = U$, máme $\dim(U) = \dim(V)$.
Matice $[f]_{B,C}$ je čtvercová a splňuje $[f^{-1}]_{C,B}[f]_{B,C} = [\text{id}]_{B,B} = \mathbf{I}$.

Ukázka isomorfismu

Nechť (\mathcal{A}, Δ) je vektorový prostor sudých podgrafů grafu G nad tělesem \mathbb{Z}_2 . Zobrazení $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_2^3$ dané následující tabulkou je lineární a bijektivní, proto jde o isomorfismus.



Linearita platí, např.



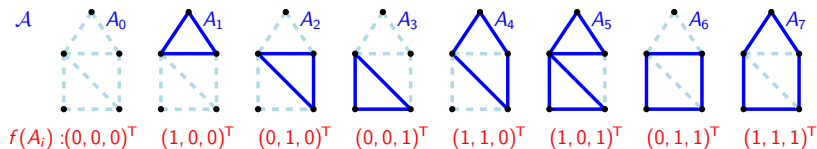
Matice zobrazení závisí na obou zvolených bázích.

Např. $[f]_{(A_1, A_2, A_3), E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dimenze obou prostorů je 3.

Použití matice zobrazení

Pro jinou volbu $B = (A_4, A_5, A_1)$ dostaneme $[f]_{B,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Všimněte si, že platí vztah $[f]_{B,E}[A]_B = [f(A)]_E$.

Např. pro A_6 dostaneme: $A_6 = A_4 \triangle A_5$, a tedy $[A_6]_B = (1, 1, 0)^T$.

Nyní:

$$[f]_{B,E}[A_6]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [f(A_6)]_E$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik je různých lineárních zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^1$?
a) žádné b) 3 c) 5 d) 9 e) 15 f) 75 g) 125
2. Která z následujících matic je matice rotace o 90° po směru hodinových ručiček vzhledem k standardní bázi?
a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Má-li matice zobrazení $f : U \rightarrow V$ nulový sloupec, potom
a) f není na b) f není prosté c) $\forall \mathbf{u} \in U : f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
d) vektor $\mathbf{0}$ je alespoň dvouprvková množina.
4. Pravda nebo lež: Je-li \mathbf{A} libovolná matice lineárního zobrazení $f : U \rightarrow U$, pak \mathbf{A}^3 je maticí $f \circ f \circ f$ vůči stejnému páru bází.
5. Pokud pro $f : U \rightarrow V$ platí, že f je isomorfismem mezi U a $f(U)$, potom $\text{rank}([f]_{B,C})$
a) $< \dim(U)$, b) $< \dim(V)$, c) $= \dim(U)$, d) $= \dim(V)$,
e) $\leq \dim(U)$, f) $\leq \dim(V)$, g) závisí na volbě B a C .

Komentář k řešení kvízu

1. Každé takové zobrazení lze reprezentovat maticí ze $\mathbb{Z}_5^{1 \times 3}$ vůči dvěma pevně zvoleným bázím. Takových matic je 5^3 .
Jinými slovy, tolik je různých obrazů báze \mathbb{Z}_5^3 v \mathbb{Z}_5^1 .
2. Sloupce jsou: $f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2 = (0, -1)^T$ a $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$.
3. Pro vektor \mathbf{b}_i báze prostoru U , který odpovídá nulovému sloupci platí $f(\mathbf{b}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Má-li matice nenulový sloupec, neplatí c) a je-li V je obrazem U , neplatí a).
4. Nemusí platit, je-li $\mathbf{A} = [f]_{B,C}$ vůči různým bázím $B \neq C$.
Např. pro $f = \text{id}$ a $\mathbf{A} = 2\mathbf{I}_2$ je $\mathbf{A}^3 = 8\mathbf{I}_2 \neq 2\mathbf{I}_2 = [f \circ f \circ f]_{B,C}$.
5. Sloupce $[f]_{B,C}$ vždy generují $f(U)$ a u isomorfismu jsou lineárně nezávislé: $\text{rank}([f]_{B,C}) = \dim(f(U)) = \dim(U)$.
Odtud c) a e). Protože $f(U)$ je podprostorem V , platí i f).

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Co lze říct o zobrazeních, jejichž matice je jednotková, případně permutační?
- ▶ Je snazší určit matici přechodu od standardní báze nebo ke standardní bázi?
- ▶ Co dostaneme, vynásobíme-li matici zobrazení $[f]_{B,C}$ maticí inverzního zobrazení $[f^{-1}]_{D,B}$?
- ▶ Jdou-li složit dva isomorfismy mezi prostory konečné dimenze, bude výsledné zobrazení opět isomorfismem?