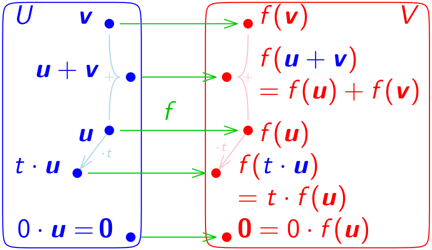
Lineární zobrazení

Pozorování: Nechť $\boldsymbol{A} \in T^{m \times n}$ a zobrazení $f : T^n \to T^m$ je definováno vztahem $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$. Pak platí:

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $f(t \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}(t \cdot \boldsymbol{u}) = t \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = t \cdot f(\boldsymbol{u})$

Definice: Nechť U a V jsou vektorové prostory nad stejným tělesem T. Zobrazení $f : U \to V$ nazveme *lineární*, pokud splňuje:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U :$
  $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $\forall \boldsymbol{u} \in U, \forall t \in T :$
  $f(t \cdot \boldsymbol{u}) = t \cdot f(\boldsymbol{u})$

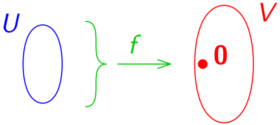


Pozorování: Pro každé lineární zobrazení platí: $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

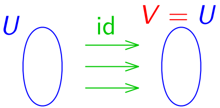
Ukázky jednoduchých lineárních zobrazení

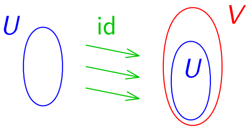
Mezi obecnými vektorovými prostory $f : U \to V$ nad stejným T.

Triviální lineární zobrazení dané předpisem: $\forall \boldsymbol{u} \in U : f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.



Identita id jako zobrazení na U dané $\forall \boldsymbol{u} \in U : \mathrm{id}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$.





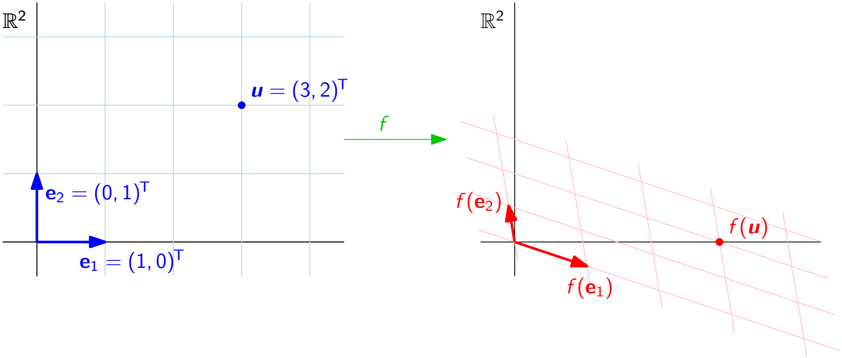
Identita může být brána i jako vnoření U do V, je-li $U \subseteq V$.

V těchto případech je linearita součtu i skalárního násobku zjevná.

Geometrická lineární zobrazení

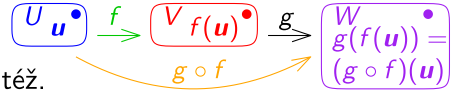
Geometrické transformace v $\mathbb{R}^2$ nebo $\mathbb{R}^3$, které fixují počátek:

- rotace kolem počátku
- osová souměrnost podle osy procházející počátkem
- stejnolehlost se středem v počátku, včetně projekce
- jakákoli transformace, která kombinuje výše uvedené



Vlastnosti lineárních zobrazení

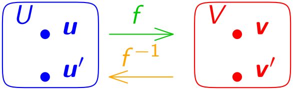
Pozorování: Jsou-li $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineární zobrazení, pak $(g \circ f) : U \to W$ je lineární též.



Důkaz: $(g \circ f)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = g(f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})) = g(f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})) =$
$= g(f(\boldsymbol{u})) + g(f(\boldsymbol{v})) = (g \circ f)(\boldsymbol{u}) + (g \circ f)(\boldsymbol{v})$
$(g \circ f)(t\boldsymbol{u}) = g(f(t\boldsymbol{u})) = g(tf(\boldsymbol{u})) = tg(f(\boldsymbol{u})) = t(g \circ f)(\boldsymbol{u})$

Pozorování: Jestliže $f : U \to V$ je bijektivní lineární zobrazení, je i $f^{-1} : V \to U$ lineární zobrazení.

Důkaz: Pro jakákoli $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ nechť $\boldsymbol{u} = f^{-1}(\boldsymbol{v})$ a $\boldsymbol{u}' = f^{-1}(\boldsymbol{v}')$, neboli $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$ a $f(\boldsymbol{u}') = \boldsymbol{v}'$.



Linearita součtu: $f^{-1}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = f^{-1}(f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{u}')) =$
$f^{-1}(f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}')) = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' = f^{-1}(\boldsymbol{v}) + f^{-1}(\boldsymbol{v}')$

Linearita skalárního násobku:
$\forall t \in T : f^{-1}(t\boldsymbol{v}) = f^{-1}(tf(\boldsymbol{u})) = f^{-1}(f(t\boldsymbol{u})) = t\boldsymbol{u} = tf^{-1}(\boldsymbol{v})$.

Definice: Bijektivní lineární zobrazení se nazývá *isomorfismus*.

Transformace na vektor souřadnic

Tvrzení: Nechť U je prostor nad T s bazí $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$.
Potom zobrazení $f : U \to T^n$ definované $f(\boldsymbol{u}) = [\boldsymbol{u}]_B$ je lineární.

Důkaz: Pro $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ vyjádříme $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i$ a $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i$, čili vektory souřadnic jsou $[\boldsymbol{u}]_B = (a_1, \dots, a_n)^{\mathsf{T}}$, $[\boldsymbol{v}]_B = (c_1, \dots, c_n)^{\mathsf{T}}$.

Linearita součtu: $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i + \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i\right]_B =$

$= \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + c_i) \boldsymbol{b}_i\right]_B = (a_1 + c_1, \dots, a_n + c_n)^{\mathsf{T}} =$

$= (a_1, \dots, a_n)^{\mathsf{T}} + (c_1, \dots, c_n)^{\mathsf{T}} = [\boldsymbol{u}]_B + [\boldsymbol{v}]_B = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

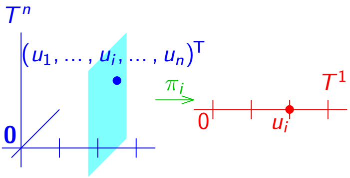
Linearita skalárního násobku:
Pro $t \in T : f(t\boldsymbol{u}) = [t\boldsymbol{u}]_B = \left[t \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i\right]_B = \left[\sum_{i=1}^{n} t a_i \boldsymbol{b}_i\right]_B =$

$= (ta_1, \dots, ta_n)^{\mathsf{T}} = t(a_1, \dots, a_n)^{\mathsf{T}} = t[\boldsymbol{u}]_B = tf(\boldsymbol{u})$

Pozorování: Zobrazení $\boldsymbol{u} \leftrightarrow [\boldsymbol{u}]_B$ je bijekce, neboli isomorfismus.

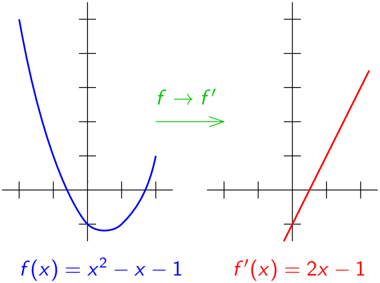
Další ukázky lineárních zobrazení

V aritmetických vektorových prostorech je *projekce* na i-tou souřadnici, čili $\pi_i : T^n \to T^1$ dané $\pi_i((u_1, \ldots, u_n)^\mathsf{T}) = u_i$, lineární zobrazení.



Pozn.: Píšeme jen u_i namísto formálně korektního $(u_i)^\mathsf{T}$.

Na prostoru funkcí s derivacemi všech řádů

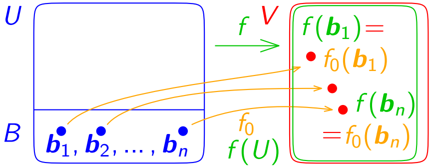


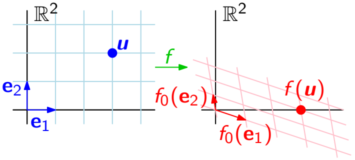
je i *derivace* lineární zobrazení:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$(t \cdot f(x))' = t \cdot f'(x)$$

Věta o rozšiřitelnosti

Věta: Nechť U a V jsou prostory nad T a B je báze U.
Pak pro jakékoli zobrazení $f_0 : B \to V$ existuje jediné lineární zobrazení $f : U \to V$ rozšiřující f_0, t.j. $\forall \boldsymbol{b} \in B : f(\boldsymbol{b}) = f_0(\boldsymbol{b})$.





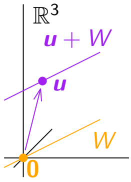
Důkaz: Pro jakékoli $\boldsymbol{u} \in U$ existují jednoznačná $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_n \in T \setminus 0$ a $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n \in B$ taková, že $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i$.
Potom $f(\boldsymbol{u}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\boldsymbol{b}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_0(\boldsymbol{b}_i)$.

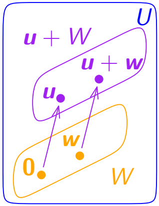
Důsledek: Pokud je $f : U \to V$ lineární, pak $\dim(U) \geq \dim(f(U))$, protože obraz $f(B)$ báze B prostoru U generuje $f(U)$.

Afinní prostory

Definice: Nechť W je podprostor vektorového prostoru U a $\boldsymbol{u} \in U$.
Afinní prostor značený $\boldsymbol{u} + W$ je množina $\{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} \in W\}$.
Dimenzí afinního prostoru $\boldsymbol{u} + W$ se rozumí hodnota $\dim(W)$.

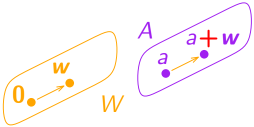
Ukázka: Přímky a roviny (a nadroviny) v obecné poloze v $\mathbb{R}^3$ (v $\mathbb{R}^d$).





Poznámka: Afinní prostor lze definovat obecněji pomocí axiomů jako množinu A a zobrazení $+: A \times W \to A$ splňující:

- $\forall a \in A, \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in W$:
  $a + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (a + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$
- $\forall a, b \in A\ \exists! \boldsymbol{v} \in W : a + \boldsymbol{v} = b$



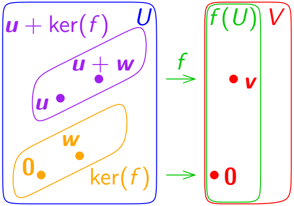
Prvky množiny A se nazývají *body* (nejde o skaláry ani o vektory).

Pozorování: Pro každé $a \in A$ platí: $a + \mathbf{0} = a$.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{v}$ je unikátní vektor splňující $a + \boldsymbol{v} = a$. Pak platí:
$a = a + \boldsymbol{v} = (a + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = a + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Vzor vektoru v lineárním zobrazení

Definice:
Jádro lineárního zobrazení $f : U \to V$
je $\ker(f) = \{\boldsymbol{w} \in U : f(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}\}$.



Pozorování: Jádro je *vektorový* podprostor.

Pozorování: Pro $f : T^n \to T^m$ dané
$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ je $\ker(f) = \ker(\boldsymbol{A})$.

Věta: Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Pro libovolné $\boldsymbol{v} \in V$, rovnice $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$ buď nemá žádné řešení, nebo řešení tvoří afinní prostor $\boldsymbol{u} + \ker(f)$, kde $\boldsymbol{u}$ je libovolné řešení rovnice $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$.

Ukázky: Řešení soustav $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$; konstanta $+c$ při integrování.

Důkaz: Když $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{u} + \ker(f)$, pak $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ pro $\boldsymbol{w} \in \ker(f)$.
Nyní $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$.

Naopak, pro $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$ platí $f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, čili $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} \in \ker(f)$, a odtud $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{u} + \ker(f)$.

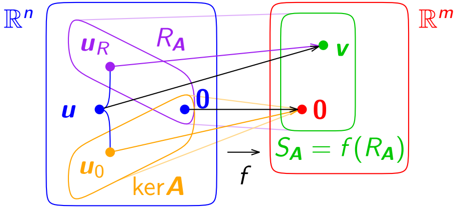
Bonus: alternativní důkaz věty, že $\dim R_{\boldsymbol{A}} = \dim S_{\boldsymbol{A}}$ nad $\mathbb{R}$

Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mějme zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dané $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.
Víme, že $S_{\boldsymbol{A}} = f(\mathbb{R}^n)$. Dokonce ukážeme, že $S_{\boldsymbol{A}} = f(R_{\boldsymbol{A}})$.

Pro každé $\boldsymbol{v} \in S_{\boldsymbol{A}}$ existuje $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}$.

Protože $\dim R_{\boldsymbol{A}} + \dim(\ker \boldsymbol{A}) = n$ a přitom $R_{\boldsymbol{A}} \cap \ker \boldsymbol{A} = \{\mathbf{0}\}$, tvoří sjednocení bází $R_{\boldsymbol{A}}$ a $\ker \boldsymbol{A}$ bázi $\mathbb{R}^n$. Vektor $\boldsymbol{u}$ lze tudíž rozložit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_R + \boldsymbol{u}_0$, kde $\boldsymbol{u}_R \in R_{\boldsymbol{A}}$ a $\boldsymbol{u}_0 \in \ker \boldsymbol{A}$. Dostáváme:

$$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}_R + \boldsymbol{u}_0) = f(\boldsymbol{u}_R) + f(\boldsymbol{u}_0) = f(\boldsymbol{u}_R) + \mathbf{0} = f(\boldsymbol{u}_R)$$



Ze vztahu $f(R_{\boldsymbol{A}}) = S_{\boldsymbol{A}}$ vyplývá $\dim R_{\boldsymbol{A}} \geq \dim S_{\boldsymbol{A}}$.

Z $f(R_{\boldsymbol{A}^\mathsf{T}}) = S_{\boldsymbol{A}^\mathsf{T}}$ vyplývá $\dim S_{\boldsymbol{A}} = \dim R_{\boldsymbol{A}^\mathsf{T}} \geq \dim S_{\boldsymbol{A}^\mathsf{T}} = \dim R_{\boldsymbol{A}}$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik je různých lineárních zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_3^1$?
   a) žádné b) 3 c) 5 d) 9 e) 15 f) 75 g) 125
2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(\boldsymbol{x}) = (x_1, x_3)^\mathsf{T}$
   a) je lineární a lze ho zapsat jako složení dvou projekcí $\pi_1 \circ \pi_3$
   b) je lineární, ale není složením žádných dvou projekcí $\pi_i \circ \pi_j$
   c) není lineární zobrazení
3. Pravda nebo lež: Inverzní zobrazení ke složení lineárních zobrazení $g \circ f$ je zobrazení $g^{-1} \circ f^{-1}$ a je dokonce lineární.
4. Je-li f isomorfismus, pak $\ker(f)$ je:
   a) $\emptyset$ b) $\{\emptyset\}$ c) 0 d) $\{0\}$ e) $\mathbf{0}$ f) $\{\mathbf{0}\}$
   g) $\mathbf{0}_n$ h) $\{\mathbf{0}_n\}$ i) $\mathbf{0}_{m,n}$ j) $\{\mathbf{0}_{m,n}\}$ k) něco nenulového
5. Pravda nebo lež: Afinní prostor obsahuje $\mathbf{0}$, právě když je vektorovým prostorem.

Komentář k řešení kvízu

1. Lineární zobrazení uvažujeme jen pro prostory nad stejným tělesem, zde se liší $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_3$.
2. Oborem hodnot projekce je jednodimenzionální prostor.
3. Inverzí je zobrazení $f^{-1} \circ g^{-1}$, jinak ani nejdou složit.
4. Vzorem nulového vektoru je množina obsahující nulový vektor. Je-li zobrazení prosté, další vektory už obsahovat nemůže.
5. Vektorový prostor W je i afinním prostorem $\mathbf{0} + W$. Tento afinní prostor obsahuje $\mathbf{0}$, neboť $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Obráceně, afinní prostor $\mathbf{0} + W$ je uzavřený na sčítání i na skalární násobky a proto je vektorovým prostorem.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Pro který z axiomů lineárního zobrazení je nutné, aby oba prostory byly nad stejným tělesem?
- Jsou-li $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$, $g(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, a jdou-li složit, čemu pak odpovídá zobrazení $g \circ f$?
- Která ze zobrazení v ukázkách jsou isomorfismy a která ne?
- Proč je ve větě o rozšiřitelnosti třeba jednoznačnost n a nenulovost koeficientů a_i?
- Jaké vlastnosti by muselo mít zobrazení f_0 z věty o rozšiřitelnosti, aby f bylo prosté, resp. aby bylo na nebo aby bylo isomorfismem?
- Proč je obraz $f(U)$ prostoru U podprostorem V a nikoli jen podmnožinou?

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Je lineární zobrazení jednoznačně určeno obrazem lineárně nezávislé množiny nebo obrazem systému generátorů?
- Všimněte si, že obrazy lineárních zobrazení lze sčítat i násobit skalárem a tak definovat jejich součet i skalární násobek. Jakou algebraickou strukturu tvoří množina všech lineárních zobrazení $\{f : U \to V\}$ s těmito dvěma operacemi?
- Jaká je geometrická interpretace afinních prostorů v $\mathbb{R}^3$?
- Mohou mít dva různé afinní prostory stejné dimenze neprázdný průnik? Je to možné, i když jsou určené stejným prostorem W?