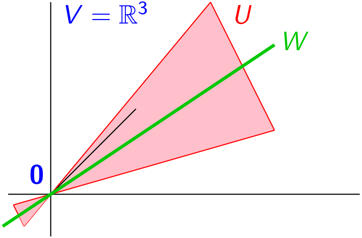
Podprostor

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad T, potom *podprostor* U je neprázdná podmnožina V splňující:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U : \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
- $\forall \boldsymbol{v} \in U, \forall t \in T : t\boldsymbol{v} \in U$

Ukázky: Rovina U obsahující počátek $\mathbf{0}$ je podprostorem $V = \mathbb{R}^3$.

Přímka $W \subset U$ procházející počátkem je podprostorem U i podprostorem V.



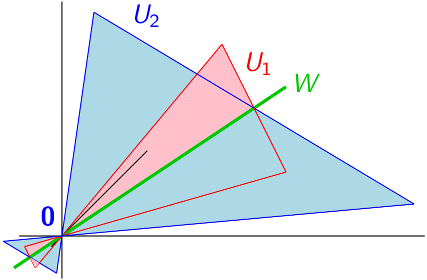
Polynomy stupně nejvýše 5 tvoří podprostor prostoru funkcí.

Pozorování: Jakýkoli podprostor je také vektorový prostor, protože existenční axiomy plynou z uzavřenosti: $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v} \in U$ a také $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v} \in U$. Ostatní axiomy platí již na V.

Průnik podprostorů

Věta: Nechť $(U_i, i \in I)$ je libovolný systém podprostorů prostoru V.
Průnik tohoto systému $\bigcap_{i\in I} U_i$ je také podprostorem V.

Ukázka: Roviny U_1 a U_2 jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.
Jejich průnikem je přímka W. Je to také podprostor $\mathbb{R}^3$.



Průnik podprostorů

Věta: Nechť $(U_i, i \in I)$ je libovolný systém podprostorů prostoru V. Průnik tohoto systému $\bigcap_{i \in I} U_i$ je také podprostorem V.

Důkaz: Nechť $W = \bigcap_{i \in I} U_i$. Ukážeme, že W je uzavřen na $+$ a $\cdot$.

$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W :$
$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W \Rightarrow \forall i \in I : \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U_i \Rightarrow \forall i \in I : \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U_i \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$

$\forall t \in T, \boldsymbol{v} \in W :$
$\boldsymbol{v} \in W \Rightarrow \forall i \in I : \boldsymbol{v} \in U_i \Rightarrow \forall i \in I : t\boldsymbol{v} \in U_i \Rightarrow t\boldsymbol{v} \in W$

Všimněte si, že když $I = \emptyset$, pak prázdný průnik $W = \bigcap_{i \in \emptyset} U_i = V$ je podprostorem samotného V.

Podprostor generovaný množinou, lineární kombinace

Definice: Podprostor prostoru V *generovaný* množinou M je průnik všech podprostorů U z V, které obsahují M. Značí se $\mathrm{span}(M)$.

Formálně $\mathrm{span}(M) = \bigcap\{U : M \subseteq U, U \text{ je podprostor } V\}$

Nazývá se též *lineární obal* M a může se značit $\mathcal{L}(M)$.

Ukázky: Pro $V = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{span}(\{(2,2,2)^\mathsf{T}\}) = \{(a,a,a)^\mathsf{T}, a \in \mathbb{R}\}$
... přímka obsahující body se všemi třemi souřadnicemi totožnými

$\mathrm{span}(\{(1,0,0)^\mathsf{T}, (0,1,0)^\mathsf{T}\}) = \{(a,b,0)^\mathsf{T}, a, b \in \mathbb{R}\}$
... rovina určená prvními dvěma osami

Definice: *Lineární kombinace* vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ nad T je libovolný vektor $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{v}_k$, kde $a_1, \ldots, a_k \in T$.

Věta: Nechť V je vektorový prostor nad T a M je podmnožina V. Pak $\mathrm{span}(M)$ je množina všech lineárních kombinací vektorů z M.

Ukázka pro $W = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$

Pro $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & 13 & -9 & -4 \\ 3 & -6 & 9 & -9 & 1 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

řešíme $W = \{p_1(2,1,0,0,0)^\mathsf{T} + p_2(12,0,-3,1,0)^\mathsf{T} : p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}$

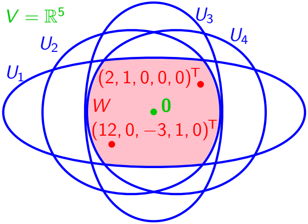
1. W lze chápat coby *průnik* následujících podprostorů:

$U_1 = \{\boldsymbol{x} : (1,-2,4,0,3) \cdot \boldsymbol{x} = 0\}$
$U_2 = \{\boldsymbol{x} : (-2,4,-6,6,0) \cdot \boldsymbol{x} = 0\}$
$U_3 = \{\boldsymbol{x} : (4,-8,13,-9,-4) \cdot \boldsymbol{x} = 0\}$
$U_4 = \{\boldsymbol{x} : (3,-6,9,-9,1) \cdot \boldsymbol{x} = 0\}$

Každé U_i odpovídá jedné rovnici soustavy a tvoří *nadrovinu* v $\mathbb{R}^5$.
$W = U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4$

2. Stejný podprostor W již byl popsaný jako *množina lineárních kombinací*
$W = \mathrm{span}((2,1,0,0,0)^\mathsf{T}, (12,0,-3,1,0)^\mathsf{T})$

Správnost Gaussovy eliminace a zpětné substituce dokazuje, že oba způsoby popisují stejný podprostor v $\mathbb{R}^5$.



Důkaz věty

Věta: Nechť V je vektorový prostor nad T a M je podmnožina V. Pak $\mathrm{span}(M)$ je množina všech lineárních kombinací vektorů z M.

Pro $W_1 = \bigcap_{M \subseteq U_i \subseteq V} U_i$, $W_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i : k \in \mathbb{N}, a_i \in T, \boldsymbol{v}_i \in M \right\}$.
chceme ukázat $W_1 = \mathrm{span}(M) = W_2$.

W_2 je podprostor, protože je uzavřen na skalární násobky

$$\boldsymbol{u} \in W_2 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i \Rightarrow t\boldsymbol{u} = t \sum_{i=1}^{k} a_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} (ta_i) \boldsymbol{v}_i \Rightarrow t\boldsymbol{u} \in W_2$$

a analogicky také na součty $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in W_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in W_2$

Protože $M \subseteq W_2$ máme W_2 mezi protínajícími se podprostory U_i.
Odtud $W_1 \subseteq W_2$.

Každý U_i obsahuje M a je uzavřen při sčítání a skalární násobky.
Tudíž každý U_i obsahuje všechny lineární kombinace vektorů M.
Proto $\forall U_i : W_2 \subseteq U_i \Rightarrow W_2 \subseteq W_1$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež: Průnik tří přímek coby vektorových podprostorů roviny může být prázdný.
2. Jsou-li $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ různé a netriviální, potom mezi $\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ a $\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}\} \cup \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}\}$ platí vždy vztah: a) $=$, b) $\neq$, c) $\subseteq$, d) $\supseteq$.
3. Pro všechny podmnožiny A, B vektorového prostoru V platí:
   a) $\operatorname{span}(A \cap B) = \operatorname{span} A \cap \operatorname{span} B$, b) $\operatorname{span} V = V$,
   c) $|A| \leq |B| \Rightarrow |\operatorname{span} A| \leq |\operatorname{span} B|$, d) $\operatorname{span} \emptyset = \emptyset$,
   e) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{span} A \subseteq \operatorname{span} B$, f) $\operatorname{span}(\operatorname{span} A) = \operatorname{span} A$.
4. Třetí nejmenší možná mohutnost podprostoru prostoru $\mathbb{Z}_5^7$ je:
   a) 15, b) 21, c) 25, d) 35, e) 49, f) 125, g) 175, h) 343.
5. Pravda nebo lež: Průnik nekonečně mnoha různých vektorových podprostorů může být konečný neprázdný.

Komentář k řešení kvízu

1. Přímky coby vektorové prostory musejí procházet počátkem.
2. Vektor, který je skalárním násobkem $\boldsymbol{u}$ nebo $\boldsymbol{v}$, je i lineární kombinací obou (jeden koeficient nebo i oba mohou být 0).
3. a) např. v $\mathbb{R}^2 : A = \{\mathbf{e}_1\}, B = \{2\mathbf{e}_1\}$; b) v průniku je jen V;
   c) např. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \{c\mathbf{e}_1, c \in \mathbb{R}\}$ (stačí i $c \in \{1, 2, 3\}$);
   d) $\mathbf{0}$ je v průniku všech podprostorů, podobně i $\sum\limits_{\emptyset} = \mathbf{0}$;
   e) kombinace vektorů A jsou i kombinacemi vektorů B;
   f) lineární kombinace lineárních kombinací jsou lineární kombinace vektorů, z nichž jsou kombinace vytvořeny;
4. Nejmenší prostor je triviální: $\{\mathbf{0}\}$. Prostory druhé nejmenší mohutnosti mají 5 vektorů, třetí 25, atd. po mocninách 5.
5. Např. průnik všech přímek v $\mathbb{R}^2$ procházejících počátkem.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Může mít nespočetný počet podprostorů neprázdný průnik?
- Pokud je $\boldsymbol{u}$ lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ a $\boldsymbol{u}'$ je lineární kombinace $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$, lze pak součet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'$ vyjádřit jako lineární kombinaci $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$?

  Jak to souvisí s lineárním obalem nekonečné množiny M?