Vektorový prostor

Definice: *Vektorový prostor* $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je množina V spolu s binární operací $+$ na V a binární operací *skalárního násobku* $\cdot : T \times V \to V$, kde:

- $(V, +)$ je Abelovská grupa
- $\forall a, b \in T, \forall \boldsymbol{v} \in V : (a \cdot b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v})$
- $\forall \boldsymbol{v} \in V : 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$
- $\forall a, b \in T, \forall \boldsymbol{v} \in V : (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = (a \cdot \boldsymbol{v}) + (b \cdot \boldsymbol{v})$
- $\forall a \in T, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V : a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (a \cdot \boldsymbol{u}) + (a \cdot \boldsymbol{v})$

Prvky T se nazývají *skaláry*, prvky V se nazývají *vektory*.

Rozlišujeme nulový skalár $0 \in T$ a nulový vektor $\mathbf{0} \in V$.
Máme opačný skalár $-a \in T$ i opačný vektor $-\boldsymbol{v} \in V$.

Existuje inverzní skalár $a^{-1} \in T$, ale *neexistuje inverzní vektor* $\boldsymbol{v}^{-1}$*!*
Součiny $\boldsymbol{v} \cdot a$ a $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ nejsou definovány a tak jsou *formálně chybné!*

Symbol součinu $\cdot$ se často vynechává. Součin $\cdot$ má přednost před $+$.

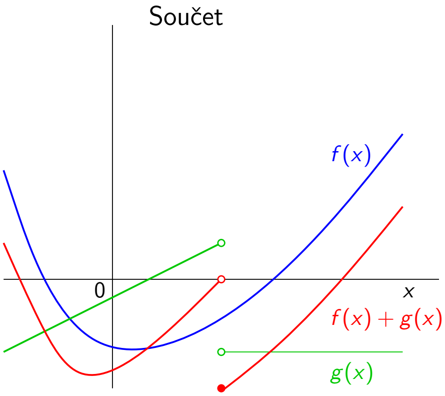
Ukázky

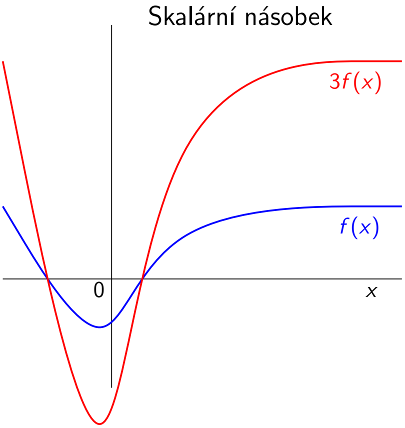
- *Aritmetický* vektorový prostor T^n dimenze n nad tělesem T.
  Vektory jsou uspořádáné n-tice prvků z T.
  Sčítání a skalární násobky se provádějí po souřadnicích.

  Každé těleso T dává vektorový prostor T^1 stejné mohutnosti.
- $T^{m \times n}$ ... matice typu $m \times n$ nad T.
- $V = \{\mathbf{0}\}$ *triviální* vektorový prostor nad libovolným tělesem T.
- Polynomy s koeficienty v T.
- Polynomy omezeného stupně.

Vektorový prostor reálných funkcí nad tělesem $\mathbb{R}$

Vektory f, g jsou reálné funkce reálné proměnné





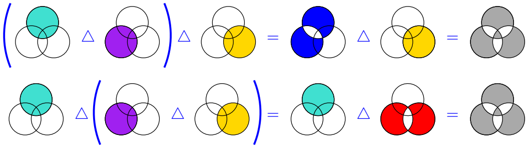
Množinové systémy jako vektorové prostory

Nechť $\mathcal{A}$ je systém podmnožin množiny M, který je uzavřen na symetrický rozdíl $\triangle$.

Potom $(\mathcal{A}, \triangle, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$, kde $\cdot$ je definován jako: $0 \cdot A = \emptyset$, neutrální prvek $\triangle$, a $1 \cdot A = A$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$.

Platí: $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$,

protože výsledkem je podmnožina M s prvky, které náleží lichému počtu množin A, B a C.

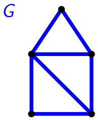


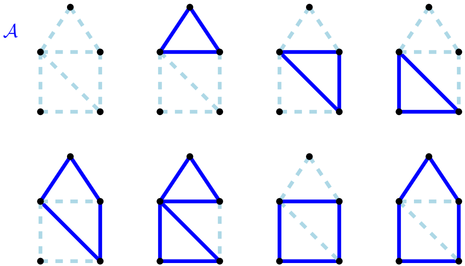
Libovolnou $A \in \mathcal{A}$ lze reprezentovat *charakteristickou funkcí* $\chi_A : M \to \mathbb{Z}_2$ definovanou $\chi_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{pro } a \in A \\ 0 & \text{pro } a \notin A \end{cases}$

Pozorování: Množina $A \triangle B$ má charakteristickou funkci $\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B$, protože $1 + 1 = 0$ v $\mathbb{Z}_2$.

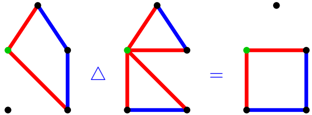
Vektorový prostor na grafech

Nechť $M = E_G$ a $\mathcal{A}$ obsahuje množiny hran A takové, že každý vrchol G náleží sudému počtu hran z A.
Tyto množiny A indukují tzv. *sudé podgrafy* grafu G.





Operace $\triangle$ zachovává sudý stupeň, protože symetrický rozdíl dvou množin sudých mohutností, zde množin hran obsahujících tentýž vrchol, má také sudou mohutnost.



$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Vlastnosti vektorových prostorů

Protože $(V, +)$ je grupa, máme už dokázáno:

- jednoznačnost vektoru $\mathbf{0}$,
- jednoznačnost $-\boldsymbol{u}$,
- korektnost ekvivalentních úprav: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$,
- řešitelnost rovnic: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$.

Pozorování: Pro jakékoli $\boldsymbol{v} \in V$ a $a \in T$ platí: $0\boldsymbol{v} = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Důkaz:

$0\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = 0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v} - 0\boldsymbol{v} = (0 + 0)\boldsymbol{v} - 0\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} - 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

$a\mathbf{0} = a\mathbf{0} + \mathbf{0} = a\mathbf{0} + a\mathbf{0} - a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) - a\mathbf{0} = a\mathbf{0} - a\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Pozorování: Pro libovolné $\boldsymbol{v} \in V$ platí: $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.

Důkaz: $(-1)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{v} = (-1 + 1)\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

Pozorování: Pokud $a\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, pak $a = 0$ nebo $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Důkaz: Pokud $a \neq 0$, pak $\boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = a^{-1}a\boldsymbol{v} = a^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik vektorů má prostor čtvercových matic řádu 3 nad $\mathbb{Z}_2$?
   a) 8, b) 9, c) 12, d) 18, e) 81, f) 512, g) víc než 1 000.
2. Nulový vektor $\mathbf{0}_n$
   a) je shodný pro všechny aritmetické vektorové prostory,
   b) je shodný pro aritmetické prostory s vektory stejných délek,
   c) je v každém aritmetickém vektorovém prostoru jiný,
   d) patří jedinému vektorovému prostoru a to aritmetickému.
3. Pravda nebo lež? Každý vektorový prostor nad konečným tělesem má konečně mnoho vektorů.
4. Jsou-li charakteristické funkce χ_A a χ_B množin A a B dané následující tabulkou, potom řádek pro $\chi_A + \chi_B$ má vpravo:

a	1	2	3
$\chi_A(a)$	1	1	0
$\chi_B(a)$	0	1	0

   a) 0 0 0, b) 1 0 0, c) 1 1 0, d) 1 2 0, e) 1 2 3, f) 1 1 1.

Komentář k řešení kvízu

1. Matice mají 9 prvků, každý je buď 0 nebo 1. Existuje 2^9 různých matic, každá je vektorem v uvedeném prostoru $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$.
2. Různá tělesa T a R mají různé nulové prvky: $0_T \neq 0_R$. Např. nulový prvek tělesa $\mathbb{R}$ je reálné číslo, ale nulový prvek tělesa racionálních funkcí $\mathbb{R}(x)$ je konstantní nulová funkce. Proto se liší i nulové vektory $(0_T, \ldots, 0_T) \in T^n$ a $(0_R, \ldots, 0_R) \in R^n$, i když mají stejnou délku n.
3. Např. systém všech podmnožin množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ je nekonečný vektorový prostor nad konečným tělesem $\mathbb{Z}_2$.
4. Obor hodnot každé charakteristické funkce χ je $\mathbb{Z}_2$. Charakteristické funkce proto sčítáme po složkách nad $\mathbb{Z}_2$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Které axiomy lze využít při práci ve vektorových prostorech, započítáme-li i ty, které jsou v definici tělesa a grupy?
- Které operace nevíc lze provádět s aritmetickými vektory?
- Které operace s polynomy jsou operace vektorového prostoru?
- Jak vyjádříte řešení rovnice $a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$?
  Z kterých axiomů vyplývá vzorec pro řešení?