Regulární, singulární a inverzní matice

Definice: Pokud pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $\boldsymbol{AB} = \mathbf{I}_n$, pak se $\boldsymbol{B}$ nazývá *inverzní matice* a značí se $\boldsymbol{A}^{-1}$.
Pokud má $\boldsymbol{A}$ inverzi, pak se nazývá *regulární*, jinak je *singulární*.

Věta: Pro $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $\boldsymbol{A}$ je regulární, tj. $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \boldsymbol{AB} = \mathbf{I}_n$.
2. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$.
3. $\boldsymbol{A} \sim\sim \mathbf{I}_n$.
4. Soustava $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Důkaz: 2. $\Leftrightarrow$ 4. již bylo ukázáno.
2. $\Rightarrow$ 3. z Gaussovy-Jordanovy eliminace, 2. $\Leftarrow$ 3. $\mathbf{I}_n$ je v REF.
2. $\Rightarrow$ 1. Označme $\mathbf{I}_n = (\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_n)$. Pro $i = 1, \dots, n$ uvažme soustavy $\boldsymbol{Ax}_i = \mathbf{e}_i$. Z $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = n$ dostaneme $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{x}_1 | \dots | \boldsymbol{x}_n)$.
1. $\Rightarrow$ 2. Pokud $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) < n$, pak pro některé i může být i-tý řádek $\boldsymbol{A}$ eliminován ostatními řádky, $\boldsymbol{Ax}_i = \mathbf{e}_i$ tedy nemá žádné řešení, protože jedinou 1 v $\mathbf{e}_i$ nelze eliminovat nulami.

Ukázka

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \scriptstyle \mathrm{III} \\ \scriptstyle \mathrm{II}-3\mathrm{I}\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \scriptstyle -5\mathrm{II}\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle +\mathrm{III} \\ \scriptstyle -\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ze třetí matice v REF vidíme, že $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 3$, tudíž je $\boldsymbol{A}$ regulární.

Soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{e}_1$ má řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \sim\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right) \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}4\\ -3\\ 3\end{pmatrix}$$

Podobně soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{e}_2$ a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_3 = \mathbf{e}_3$ mají řešení $\boldsymbol{x}_2 = (-1, 1, -1)^T$ a $\boldsymbol{x}_3 = (-8, 6, -5)^T$.

Z nich sestavíme inverzní matici: $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix}4 & -1 & -8\\ -3 & 1 & 6\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle \mathrm{II} \\ \scriptstyle \mathrm{III} \\ \scriptstyle \mathrm{I}-\frac{1}{3}\mathrm{II}-2\mathrm{III}\end{array} \sim \begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}') = 2 \;\Rightarrow$ $\boldsymbol{A}'$ je singulární.

Soustava $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{e}_1$ nemá řešení $\Rightarrow$ $(\boldsymbol{A}')^{-1}$ neexistuje

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\scriptstyle \mathrm{II} \\ \scriptstyle \mathrm{III} \\ \scriptstyle \mathrm{I}-\frac{1}{3}\mathrm{II}-2\mathrm{III}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Vlastnosti inverzní matice

Důsledek: Existuje-li inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, pak je jednoznačná.

Důsledek: Pro regulární $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ platí: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}$.
(Čili invertování regulárních matic je ekvivalentní úprava rovnic.)

Věta: Inverzní matice splňuje: $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \mathbf{I}$.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že $\boldsymbol{A}^{-1}$ je regulární:
Pokud $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ má řešení, pak $\boldsymbol{x} = \mathbf{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Existuje tedy $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$ a dostáváme:
$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\mathbf{I} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}) =$
$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{I}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{I}$

Důsledek: Pokud čtvercové matice splňují $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \mathbf{I}$, pak $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.

Důkaz: $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$

Výpočet inverzní matice

- Z $(\boldsymbol{A}|\mathbf{I})$ Gaussovou-Jordanovou eliminací spočítáme $(\mathbf{I}|\boldsymbol{B})$.
- Pokud tento proces selže, pak $\boldsymbol{A}$ je singulární.
- Označme $\boldsymbol{E}_1, \dots, \boldsymbol{E}_k$ elementární matice použitých elementárních úprav. Pak levá strana $(\boldsymbol{A}|\mathbf{I}) \sim\sim (\mathbf{I}|\boldsymbol{B})$ dává $\boldsymbol{E}_k \cdots \boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{A} = \mathbf{I}$, pravá strana dává $\boldsymbol{E}_k \cdots \boldsymbol{E}_1 \mathbf{I} = \boldsymbol{B}$. Proto $\boldsymbol{BA} = \mathbf{I}$ a tedy $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$.
- Sloupce matice $\boldsymbol{B}$ jsou ve skutečnosti řešení soustav $\boldsymbol{Ax}_i = \mathbf{e}_i$.

Ukázka:

$$(\boldsymbol{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{3\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{-5\mathrm{II}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -5 \end{array}\right) = (\mathbf{I}|\boldsymbol{A}^{-1})$$

Zkouška: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -8 \\ -3 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vlastnosti regulárních matic

Pozorování: Pokud je $\boldsymbol{R}$ regulární, pak:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \iff \boldsymbol{AR} = \boldsymbol{BR} \iff \boldsymbol{RA} = \boldsymbol{RB} \quad \not\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{AR} = \boldsymbol{RB}$

Důkaz: $\Rightarrow$ triviálně, $\Leftarrow$: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\mathbf{I} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{B}\mathbf{I} = \boldsymbol{B}$.
Důkaz druhé ekvivalence je analogický.

Tvrzení: Regulární matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ stejného řádu splňují:

- $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{AB}$ je regulární
- $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$
- $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathsf{T}}$

Důkaz: $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\mathbf{I} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \mathbf{I}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Zbývající body si dokažte sami podobným způsobem.

Maticové rovnice

Pozorování: Pro matice shodných či vhodných typů platí:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+(-1)\boldsymbol{A},$$

pro $t \neq 0$: $\quad t\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}=\frac{1}{t}\boldsymbol{B},$

pro regulární $\boldsymbol{A}$: $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},$

pro regulární $\boldsymbol{A}$: $\quad \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}.$

Pozor, součiny $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$ se mohou lišit.

Ukázka:

Rovnice $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

mají různá řešení $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 42 & -14 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ 14 & -30 \end{pmatrix}$

Zkouška:

$$\begin{array}{cc|cc} & & -9 & 3 \\ & & 42 & -14 \\ \hline 9 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} & & 9 & 2 \\ & & 4 & 1 \\ \hline 7 & -15 & 3 & -1 \\ 14 & -30 & 6 & -2 \end{array}$$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Množina řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ se singulární čtvercovou $\boldsymbol{A}$ je
   a) $\emptyset$ b) $\{\mathbf{0}\}$ c) neprázdná konečná d) nekonečná
2. Pravda nebo lež?
   Pro $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{I}$ neexistuje matice $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{A}$, aby platilo $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.
3. Která z následujících pravidel platí, mají-li výrazy smysl?
   a) $(t\boldsymbol{A})^{-1} = t\boldsymbol{A}^{-1}$ pro $t \neq 0$ b) $(\boldsymbol{A}^\mathsf{T}\boldsymbol{B}^\mathsf{T})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})^\mathsf{T}$
   c) $((\boldsymbol{A}^{-1})^\mathsf{T})^{-1} = \boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ d) $\boldsymbol{A} + \mathbf{I} = (\boldsymbol{A}^2 - \mathbf{I})(\boldsymbol{A} - \mathbf{I})^{-1}$
4. Je-li $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ obdélníková, pak rovnice $\boldsymbol{AX} = \mathbf{I}_m$:
   a) nemá nikdy řešení,
   b) může, ale nemusí mít řešení, jen je-li $m < n$,
   c) má řešení, kdykoli je $m < n$,
   d) může, ale nemusí mít řešení, jen je-li $m > n$,
   e) má řešení, kdykoli je $m > n$.

Komentář k řešení kvízu

1. Čtvercová singulární matice má menší hodnost než je počet jejích sloupců, čili má alespoň jednu volnou proměnnou a ta může nabývat nekonečně mnoha různých hodnot.
2. Pro čtvercovou $\boldsymbol{A}$ je možné zvolit $\boldsymbol{B} = \mathbf{I}$ stejného řádu jako $\boldsymbol{A}$.
3. a) správně má být $(t\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{t}\boldsymbol{A}^{-1}$,
   b) vyplývá z pravidel o inverzi a transpozici součinu: $(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{-1} = (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathsf{T}}$,
   c) invertováním obou stran dostaneme $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathsf{T}} = (\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}})^{-1}$,
   d) součinem s $\boldsymbol{A} - \mathbf{I}$ zprava $(\boldsymbol{A} + \mathbf{I})(\boldsymbol{A} - \mathbf{I}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A}\mathbf{I} + \mathbf{I}\boldsymbol{A} - \mathbf{I}^2$.
4. Platí, že $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) \leq \operatorname{rank}\boldsymbol{A} \leq \min\{m, n\}$, a má-li dosahovat $m = \operatorname{rank}\mathbf{I}_m$, je nutně $m < n$. Ani nyní nemusí mít soustava řešení, např. když $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} < m$, mj. pro nulovou matici.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Při kterých operacích s maticemi se zachovávají vlastnosti „být regulární“ a „být singulární“?
- Lze metodou z přednášky vyřešit všechny lineární rovnice s jednou neznámou $\boldsymbol{X}$, vyskytuje-li se $\boldsymbol{X}$ ve více členech? Lineární zde znamená, že v rovnici lze použít součet, rozdíl, násobek i součin s konstantními maticemi, ale nelze mocnit $\boldsymbol{X}$.