K provedení zkoušky řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Dosadíme řešení $\boldsymbol{x}$ včetně parametrů do původní soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, neboli ověříme $\boldsymbol{y}$ pro $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ a také $\overline{\boldsymbol{x}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{x}}_{n-r}$ pro $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$.

Tento test neověřuje úplnost množiny řešení, protože se může stát, že chybou v Gaussově eliminaci přidáme novou podmínku, a proto určíme jen podmnožinu všech řešení.

Pro jednoduchost uvažujeme jen homogenní soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, čili samotnou matici $\boldsymbol{A}$. U nehomogenních soustav bude třeba namísto ní vzít rozšířenou matici soustavy $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Korektnost Gaussovy eliminace lze ověřit například tím, že ji provedeme pozpátku, čili matici $\boldsymbol{A}'$ v odstupňovaném tvaru převedeme elementárními úpravami na původní matici $\boldsymbol{A}$.

To lze provést tak, že k matici $\boldsymbol{A}$ nejprve doplníme jednotkovou matici a spolu s ní provádíme eliminaci $(\boldsymbol{A}|\mathbf{I}) \sim\sim (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{C})$.
Poté přesuneme „kontrolní“ blok $\boldsymbol{C}$ před $\boldsymbol{A}'$ a Gauss-Jordanovou eliminací proces otočíme $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{A}') \sim\sim (\mathbf{I}|\boldsymbol{A})$.

Ukázka

Gaussova eliminace s přidanou jednotkovou maticí:

$$(\boldsymbol{A}|\mathbf{I}_4) = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\mathrm{I} \\ \\ -2\mathrm{I} \end{array} \sim\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{IV} \\ -3\mathrm{IV} \\ \mathrm{II}+2\mathrm{IV} \end{array}$$

$$\sim\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{C})$$

Transformace v opačném směru: $(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{A}') =$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -6 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\mathrm{I} \\ -6\mathrm{I} \\ +6\mathrm{I} \end{array} \sim\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 7 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -6 & -24 & -18 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 24 & 18 & 12 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{IV}-2\mathrm{II} \\ +3\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \end{array}$$

$$\sim\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{array}\right) = (\mathbf{I}_4|\boldsymbol{A})$$

K provedení zkoušky řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Jinou možností, jak provést zkoušku úplnosti řešení, je ověřit, že hodnost matice $\boldsymbol{A}$ nám nevyšla *vyšší*, než ve skutečnosti je.

Sloupce matice $\boldsymbol{A}$ odpovídající bázickým proměnným mají být lineárně nezávislé. Z těchto sloupců sestavíme matici $\boldsymbol{B}$ a nezávislým způsobem určíme její hodnost.

Shoduje-li se hodnost s počtem sloupců $\boldsymbol{B}$, jsou lineárně nezávislé.

Abychom neopakovali stejnou posloupnost elementárních operací jako v Gaussově eliminaci matice $\boldsymbol{A}$, můžeme buď tyto sloupce promíchat, nebo můžeme místo toho spočítat hodnost matice $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$.

Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ má alespoň tolik sloupců jako řádků, může být Gaussova eliminace $\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ rychlejší než u matice $\boldsymbol{B}$.

Ukázka

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}'$$

Ze sloupců $\boldsymbol{A}$ odpovídajících bázickým proměnným sestavíme matici $\boldsymbol{B}$ a nezávisle určíme její hodnost, např. pomocí $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^\mathsf{T})$.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{-3\mathrm{I} \\ -\mathrm{I}}}{\sim\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \underset{-\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Protože $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^\mathsf{T}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$, byla hodnost $\boldsymbol{A}$ určena správně.

K provedení zkoušky řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Kombinací obou metod je zkouška vlastnosti z druhého postupu: *„hodnost matice* $\boldsymbol{A}$ *nám nevyšla vyšší, než ve skutečnosti je"* pomocí kontrolní matice $\boldsymbol{C}$ z prvního postupu a součinu matic.

Stačí ověřit, že $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{CA}$, protože pak platí: $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}') = \mathrm{rank}(\boldsymbol{CA}) \le \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$.

Ukázka:

$$
\begin{array}{rrrr|rrrrr}
 & & & & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & & & 2 & 8 & 4 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\
 & & & & 2 & 8 & 7 & 6 & 3 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
-2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
6 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
-6 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Ze všech tří postupů je tato možnost patrně nejméně náročná na výpočet, protože namísto druhé eliminace vystačí jen se součinem. Nesmíme ovšem zapomenout provést zkoušku řešení soustavy.

Proč jsou tyto postupy korektní?

Později si ukážeme, že:

- Elementární úpravy odpovídají násobení vhodnými maticemi.
- Eliminace $\boldsymbol{C}$ na $\mathbf{I}$ odpovídá násobení zleva maticí $\boldsymbol{C}^{-1}$.
- Součin s $\boldsymbol{C}^{-1}$ provede reverzní proces oproti součinu s $\boldsymbol{C}$.

- Hodnost matice je počet jejích lineárně nezávislých sloupců.
(A také si lineární nezávislost nadefinujeme.)
- $\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}})$

- Hodnost nemůže při součinu matic vzrůst, čili
$\operatorname{rank}(\boldsymbol{CA}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$.