Řešení soustav lineárních rovnic

1. Sestavíme rozšířenou matici soustavy.
2. Pomocí elementárních ekvivalentních řádkových úprav převedeme matici do řádkově odstupňovaného tvaru.
3. Zpětnou substitucí popíšeme *všechna* řešení.

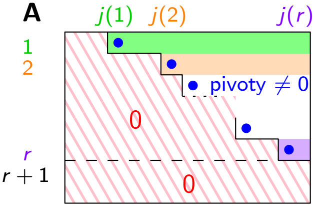
Definice: Matice $\boldsymbol{A}$ je v *řádkově odstupňovaném tvaru* (*REF* z *row echelon form*), pokud jsou nenulové řádky seřazeny podle počtu počátečních nul a nulové řádky jsou pod nenulovými.

Formálně: Označme $j(i) := \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$.
Matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je v REF, když $\exists r \in \{1, \dots, m\}$:

a) $j(1) < j(2) < \cdots < j(r)$,

b) $\forall i > r, \forall j : a_{ij} = 0$.

První nenulový prvek $a_{i,j(i)}$ v i-tém řádku se nazývá *pivot*.



Naivní algoritmus pro Gaussovu eliminaci

Input: Matice $\boldsymbol{A}$
Output: Matice $\boldsymbol{A}$ v REF
foreach i **do** určete $j(i)$ `/* prázdný řádek:` $j(i) = \infty$ `*/`
seřaďte řádky $\boldsymbol{A}$ podle $j(i)$
forever
  if $\exists i : j(i) = j(i+1) < \infty$ **then**
    `/*` i`-tý a` $(i+1)$`-ní řádky jsou nenulové a`
      `mají stejný počet počátečních` 0 `*/`
    přičtěte $-\frac{a_{i+1,j(i)}}{a_{i,j(i)}}$-násobek i-tého řádku
      k $(i+1)$-tému řádku `/* nyní:` $a_{i+1,j(i)} = 0$ `*/`
    aktualizujte $j(i+1)$ a zařaďte $(i+1)$-tý řádek na místo
  else
    `/* všechny nenulové řádky mají různý počet`
      `počátečních nul */`
    return $\boldsymbol{A}$

Konečnost: V každé iteraci roste celkový počet počátečních nul.

Ukázka Gaussovy eliminace

$$
(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{IV} \\ \mathrm{III}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) \overset{-2\mathrm{I}}{\sim}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) \overset{-2\mathrm{I}}{\sim}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) \underset{+2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{\mathrm{IV} \\ \mathrm{III}}}{\sim}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{-3\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')
$$

Rozšířené matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ a $(\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$ odpovídají soustavám rovnic $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ se stejnými množinami řešení.

Zpětná substituce

Značení: $(\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$ je rozšířená matice soustavy $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ v REF.

Pozorování: Je-li v $\boldsymbol{b}'$ pivot, pak soustava nemá žádné řešení.

Definice: Pro soustavu $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ s $\boldsymbol{A}'$ v REF jsou proměnné odpovídající sloupcům s pivoty *bázické*, ostatní jsou *volné*.

Věta: Pro $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ s $(\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$ v REF a bez pivotu v $\boldsymbol{b}'$ lze *jakoukoli* volbu volných proměnných *jednoznačně* rozšířit na řešení.

Důkaz: Indukcí podle $i = r, r-1, \ldots, 1$. V i-té rovnici:
$0x_1 + \cdots + 0x_{j(i)-1} + a'_{i,j(i)}x_{j(i)} + a'_{i,j(i)+1}x_{j(i)+1} + \cdots + a'_{in}x_n = b'_i$
hodnoty všech *následujících* bázických proměnných $x_{j(i+1)}, \ldots, x_{j(r)}$ jsou známy z indukčního předpokladu (i hodnoty všech volných proměnných), proto je hodnota $x_{j(i)}$ dána jednoznačně výrazem:
$x_{j(i)} = \frac{1}{a'_{i,j(i)}}(b'_i - a'_{i,j(i)+1}x_{j(i)+1} - \ldots - a'_{in}x_n)$.

Ukázka zpětné substituce

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim\sim (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}') = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 & 1 \\ & & & & 6 & 2 \\ & & & & & \end{array}\right) \end{array}$$

Proměnné x_1, x_3 a x_5 jsou bázické, zatímco x_2 a x_4 jsou volné.

Pro libovolné hodnoty volných proměnných, např. $x_2 = -1$ a $x_4 = \frac{1}{3}$, dostaneme jednoznačné řešení $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ takto:

3. rovnice určuje x_5, protože: $6x_5 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_5 = \frac{1}{3}$.
2. určuje x_3: $x_3 + 2x_4 + x_5 = x_3 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$.
1. určuje x_1: $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 =$

$$= x_1 + 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4.$$

$$\boldsymbol{x} = \left(4, -1, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^{\mathsf{T}}$$

Důsledky

Důsledek: Zpětnou substitucí lze nalézt jakékoli řešení.

Důkaz: V libovolném $\boldsymbol{x}$ jsou hodnoty bázických proměnných $\boldsymbol{x}$ jednoznačně určeny volnými proměnnými $\boldsymbol{x}$.

Věta: Pro libovolnou matici $\boldsymbol{A}$ a libovolnou $\boldsymbol{A}'$ v REF t.ž. $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$ jsou indexy sloupců s pivoty v $\boldsymbol{A}'$ určeny jednoznačně podle $\boldsymbol{A}$.

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}' \sim\sim \boldsymbol{A}''$. Nechť i je nejvyšší index, kde je charakter proměnných v $\boldsymbol{A}'$ a $\boldsymbol{A}''$ se liší. Předpokládejme b.ú.n.o., že x_i je bázická v $\boldsymbol{A}'$ a volná v $\boldsymbol{A}''$.

Pro libovolnou volbu volných proměnných $\boldsymbol{A}'$ určuje soustava $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ jednoznačnou hodnotu x_i.

Protože x_i je volná v $\boldsymbol{A}''$, můžeme zvolit volné proměnné pro $\boldsymbol{A}''$ stejně jako výše, ale *hodnotu x_i odlišně*.

Získáme řešení $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, které není řešením $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, což je spor.

Příklad argumentu důkazu

Ukážeme, že pro $\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{A}'' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

mají soustavy $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ různé množiny řešení:

Proměnná x_4 je v obou volná, můžeme zvolit např. $x_4 = 1$.

V obou je proměnná x_3 bázická. Z druhé rovnice $x_3 + 2 \cdot 1 = 0$ (shodné v obou soustavách) odvodíme, že $x_3 = -2$.

Proměnná x_2 je bázická v $\boldsymbol{A}'$. Její hodnota $x_2 = -2$ je *jednoznačně* určena z 1. rovnice $0x_1 + 3x_2 + 0 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0$.

Proměnná x_2 je volná v $\boldsymbol{A}''$, takže si ji můžeme zvolit libovolně. Pokud zvolíme hodnotu *odlišně* od jedinečné hodnoty z předchozího případu, např. $x_2 = 10$, pak tuto volbu *lze* rozšířit na řešení soustavy $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, konkrétně $\boldsymbol{x} = (-18, 10, -2, 1)^{\mathsf{T}}$.

Naproti tomu $\boldsymbol{x} = (-18, 10, -2, 1)^{\mathsf{T}}$ není řešením soustavy $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, protože nesplňuje její 1. rovnici.

Hodnost matice

Definice: *Hodnost* matice $\boldsymbol{A}$, značená jako $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ je počet pivotů v libovolné $\boldsymbol{A}'$ v REF takové, že $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$.

Věta: Soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, když se hodnost matice $\boldsymbol{A}$ rovná hodnosti rozšířené matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Podle Wikipedie je věta známá jako:

- Frobeniova věta v ČR a na Slovensku;
- Rouché–Capelliho věta anglicky mluvících zemích a v Itálii;
- Rouché–Frobeniova věta ve Španělsku a mnoha zemích Latinské Ameriky;
- Kronecker–Capelliho věta v Rakousku, Polsku, Rumunsku a Rusku;
- Rouché–Fonteného věta ve Francii;

zatímco existuje několik jiných vět pojmenovaných po Ferdinandu Georgu Frobeniovi (1849–1917).

Foto: Wikipedie

Hodnost matice

Definice: *Hodnost* matice $\boldsymbol{A}$, značená jako $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ je počet pivotů v libovolné $\boldsymbol{A}'$ v REF takové, že $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$.

Věta: Soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, když se hodnost matice $\boldsymbol{A}$ rovná hodnosti rozšířené matice $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Důkaz: Zvolme libovolné $(\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$ v REF t.ž. $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim\sim (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$.

Řešení $\boldsymbol{x}$ existuje $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}'$ nemá žádný pivot

$\Leftrightarrow$ pivoty $\boldsymbol{A}'$ se shodují s pivoty $(\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$,

. . . protože převod $\boldsymbol{A} \sim\sim \boldsymbol{A}'$ lze provést stejnými elementárními úpravami jako $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \sim\sim (\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}')$. (Stačí „zapomenout“ poslední sloupec.)

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolika různých hodnot může nabývat hodnost u matic s 20 řádky a 10 sloupci?
   a) 9   b) 10   c) 11   d) 19   e) 20   f) 21   g) 200
2. Předpokládejme, že pro matici $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ bude mít $(\boldsymbol{A}'|\boldsymbol{b}') \sim\sim (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ v redukovaném tvaru 6 pivotů.
   Kolik má soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ řešení?
   a) žádné   b) jedno   c) nekonečně mnoho
3. Pravda nebo lež?
   Když má čtvercová matice řádu n hodnost n, potom má soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pro libovolné $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ jediné řešení.

Komentář k řešení kvízu

1. Možné hodnoty jsou $0, 1, \ldots, 10$.
2. Matice má nutně pivot ve posledním sloupci, což je sloupec pravých stran.
3. Tato soustava nemá žádné volné proměnné, čili všechny proměnné jsou bázické a jejich hodnoty jsou dány jednoznačně z n rovnic soustavy.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Lze třídění řádků v Gaussově eliminaci nahradit nějakým jiným výpočetně efektivnějším postupem?
- Kolik aritmetických operací asymptoticky provede Gaussova eliminace a kolik zpětná substituce?
- Jak rychle může růst při zpětné substituci počet cifer řešení? Zkuste nejprve sestavit soustavu s maticí řádu 10 s čísly $0, \ldots, 10$ tak, aby nějaká složka řešení byla v řádu miliard.
- Platil by důkaz věty o jednoznačnosti volných a bázických proměnných, kdyby namísto homogenní soustavy $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ byla použita obecná soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$?
- Lze z důkazu věty o jednoznačnosti volných a bázických proměnných odvodit, že $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \subsetneq \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}''\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$?