Tip na výlet — zámek Loučeň



[Fotografie použity se svolením Zámek Loučeň a.s.]

Labyrintárium
PRVNÍ V ČECHÁCH A JEDINÉ V EVROPĚ
FIRST IN THE CZECH REPUBLIC AND THE ONLY IN EUROPE

ZÁMEK LOUČEŇ
ZÁMEK, KDE TO ŽIJE

5



DLÁŽDĚNÉ BLUDIŠTĚ

PAVEMENT MAZE
PFLASTERLABYRINTH
МОЩЁННЫЙ ЛАБИРИНТ

Dlážděné bludiště je místem, kde se Vám zatočí hlava nejen při bloudění, ale také při tanci. Stavebním materiálem je barevná a glazovaná pálená cihla. Rozloha bludiště je 63 m^2.

The paved maze is a place where your head might spin — not only from wandering but also from dancing. The construction material is colored and glazed fired brick. Area of the maze is 63 m^2.

Návod k použití / Bludiště může být procházeno dvěma způsoby, při prvním postupujte stále vpřed po cestičce nehledě na barvu cesty a křížení, až dosáhnete cíle. Při druhém náročnějším způsobu hraní vystřídejte na každém křížení (modrá) cestu dle barvy, např. červenou, žlutou, červenou atd., dokud nedojdete k cíli.

Instructions / The maze may be taken in two ways – firstly, as a straightforward maze following the paths regardless of the path colour, making your various choices in order to reach your goal. And secondly, by taking alternate path colours at each of the junctions (shown here in brown) – for example red, cream, red etc – until they lead you to your goal.

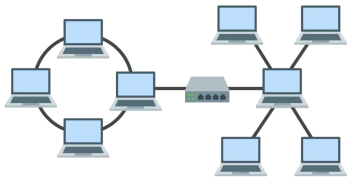
projekt **Adrian Fisher**
světoznámý tvůrce více než 450 labyrintů po celém světě

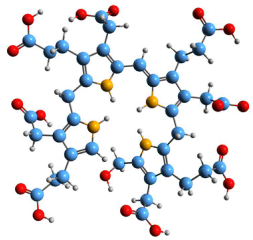
Návod k použití / Bludiště může být procházeno dvěma způsoby, při prvním postupujte stále vpřed po cestičce nehledě na barvu cesty a křížení, až dosáhnete cíle. Při druhém náročnějším způsobu hraní vystřídejte na každém křížení (modrá) cestu dle barvy, např. červenou, žlutou, červenou atd., dokud nedojdete k cíli.

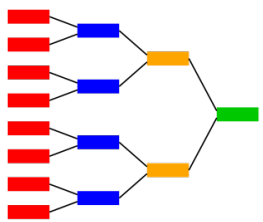
Grafy

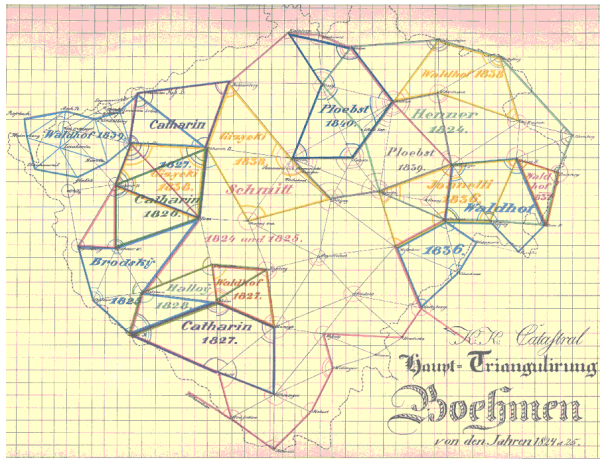
. . . znázorňují symetrické vztahy mezi různými dvojicemi prvků

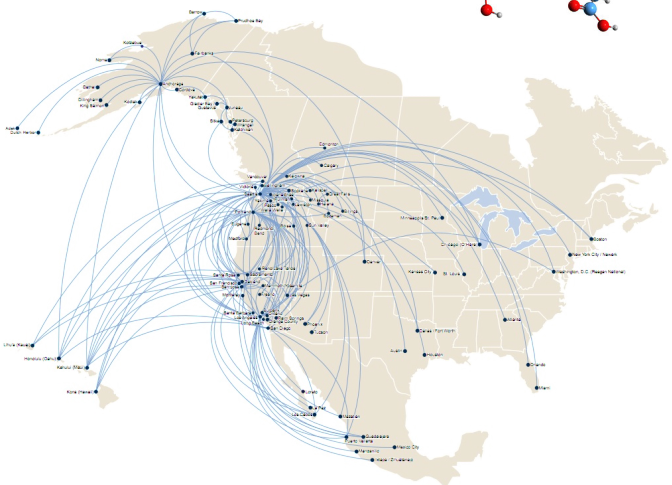
- zdali jsou místa spojena cestou — dopravní síť
- viditelnost v triangulační síti
- zdali se osoby znají — sociální sítě
- komunikační sítě mezi počítači
- struktura molekul
- vyřazovací schéma turnaje

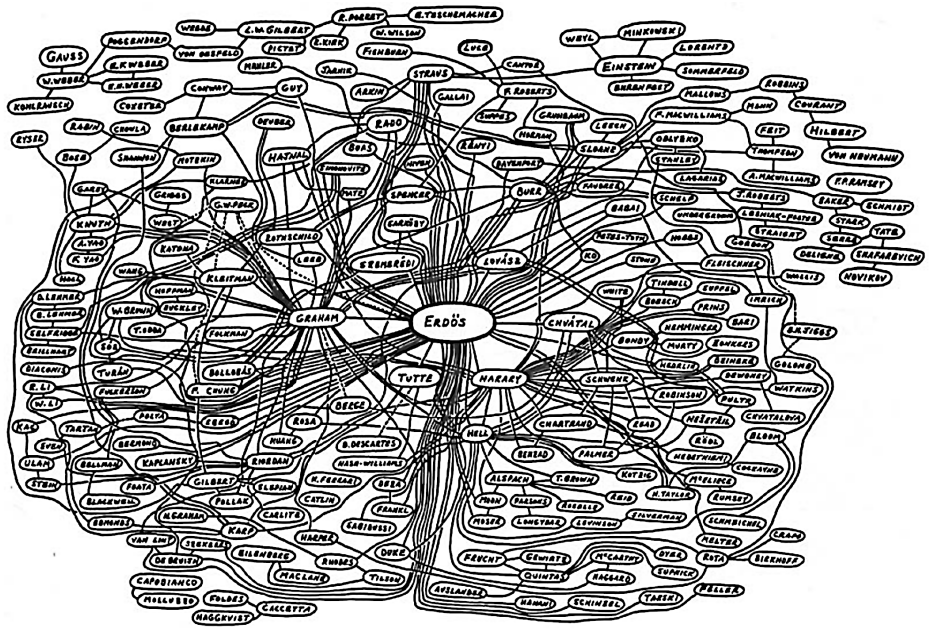






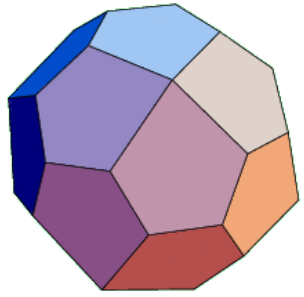






Grafy

Definice: *Graf* se značí $G = (V, E)$, kde V je množina (obvykle neprázdná a konečná) a $E \subseteq \binom{V}{2}$.
Symbol $\binom{V}{2}$ značí množinu všech dvojic z V.

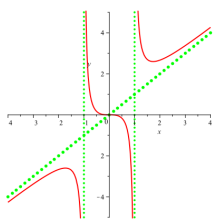


Terminologie vychází z mnohostěnů:

Prvky množniny V se nazývají *vrcholy* a značí se obvykle u, v apod.

Množina E obsahuje vybrané dvojice vrcholů neboli tzv. *hrany*.
Hrany se značí $e = (u, v)$, ale jde o *neuspořádané* dvojice, čili formálně jsou to dvouprvkové podmnožiny $\{u, v\}$.
Vrcholy tvořící hranu se nazývají *sousední*.

Pozor na podobně nazvané, ale principiálně jiné objekty:



~~Graf funkce~~



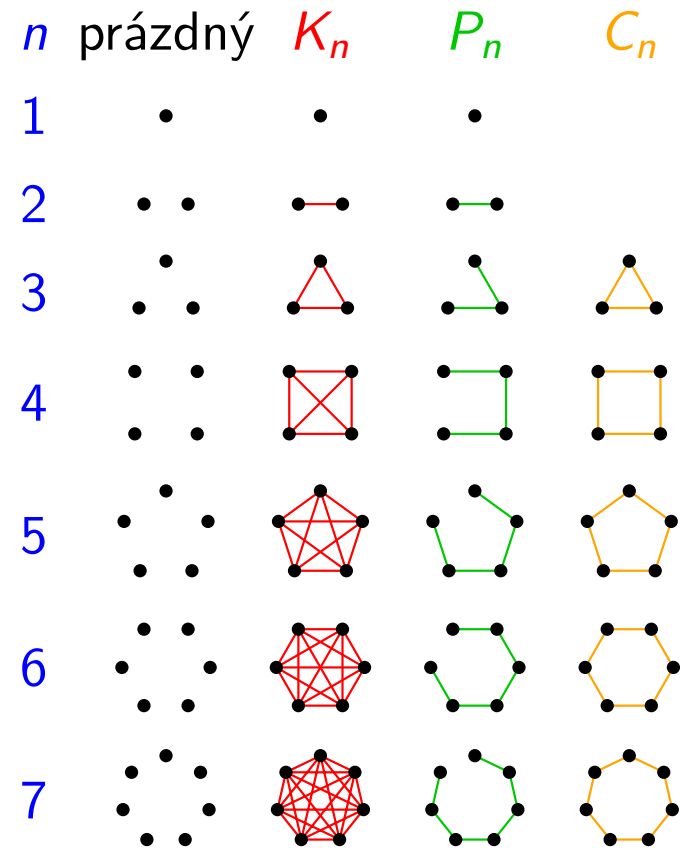
~~Statistický či finanční graf~~

Vybrané typy grafů

Prázdný graf je graf bez hran.
Úplný graf obsahuje všechny možné dvojice na množině vrcholů.
Cesta má seřazené vrcholy a sousedí jen po sobě jdoucí dvojice.
Kružnici neboli *cyklus* získáme z cesty spojením krajních vrcholů.

Formálně, pro $V_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$:

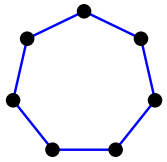
- prázdný graf je $(V_n, \emptyset)$,
- úplný graf je $K_n = \left(V_n, \binom{V_n}{2}\right)$,
- cesta P_n má hrany
  $E_{P_n} = \{(v_i, v_{i+1}) : i \in \{1, \ldots, n-1\}\}$,
- cyklus C_n pro $n \geq 3$ má hrany
  $E_{C_n} = E_{P_n} \cup \{(v_1, v_n)\}$.

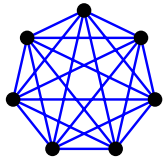


Stupně

Definice: *Stupeň* vrcholu v je roven počtu hran, kterým v náleží.
Formálně: $\deg(v) = |\{e : v \in e\}|$

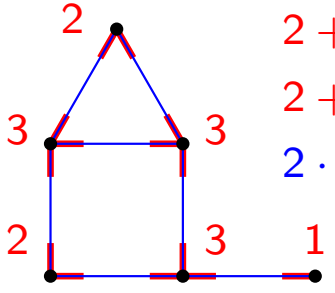
Regulární graf má všechny stupně stejné.
Např. každá kružnice je 2-regulární graf a úplný graf K_n je $(n-1)$-regulární.

C_7  2-regulární

K_7  6-regulární

Pozorování *(princip sudosti)*: Součet všech stupňů v konečném grafu je roven dvojnásobku počtu hran: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$

Důkaz:
Každá hrana má dva konce
a každý takový konec je započten
ve stupni jen u jednoho vrcholu.



$2+3+3+$
$2+3+1=$
$2 \cdot 7 = 14$

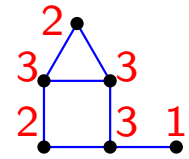
Důsledek: Konečný graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Otázka: Stačí stupně $\in \mathbb{Z}$, min ≥ 0, max $\leq n-1$ a sudý součet?

Skóre grafu

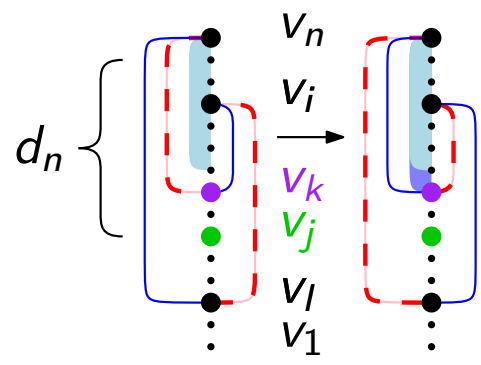
Definice: *Skóre* grafu je neklesající posloupnost stupňů jeho vrcholů.

Ukázka: Graf se skóre $1, 2, 2, 3, 3, 3$:



Věta (Havel–Hakimi): Neklesající posloupnost nezáporných celých čísel $d_1, \ldots, d_n$ je skóre grafu, právě když pro $j = n - d_n$ platí, že přerovnáním $d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, \ldots, d_{n-1} - 1$ vznikne skóre grafu.

Důkaz: $\Leftarrow$: Stačí přidat vrchol v_n sousedící s $v_j, \ldots, v_{n-1}$.
$\Rightarrow$: Označme v_k vrchol s největším indexem k nesousedící s v_n.
Pokud $k = j - 1$, pak odebrání v_n dá graf s požadovaným skóre.
Jinak existuje hrana (v_n, v_l), kde $l < k$.
Protože $d_l - 1 < d_k$, existuje vrchol v_i takový, že sousedí s v_k ale ne s v_l.
Zaměníme hrany $(v_n, v_l), (v_k, v_i)$ za (v_n, v_k), (v_l, v_i), což v novém grafu zachová stupně, ale sníží k. Opakujeme, až nastane $k = j-1$.

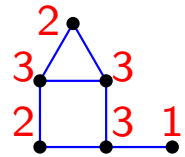


Důsledek: Pro rozeznání skóre stačí větu aplikovat nejvýše $n\times$: buď dostaneme posloupnost nul ☺ nebo záporné číslo ☹.

Skóre grafu

Definice: *Skóre* grafu je neklesající posloupnost stupňů jeho vrcholů.

Ukázka: Graf se skóre $1, 2, 2, 3, 3, 3$:

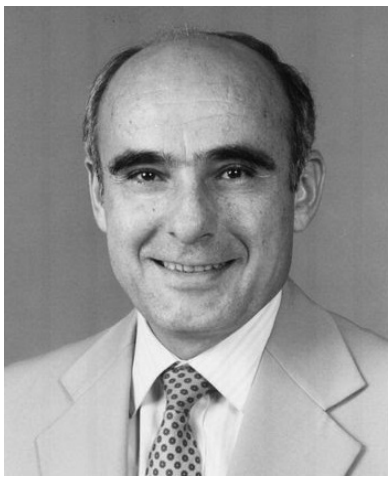


Věta (Havel–Hakimi): Neklesající posloupnost nezáporných celých čísel $d_1, \ldots, d_n$ je skóre grafu, právě když pro $j = n - d_n$ platí, že přerovnáním $d_1, \ldots, d_{j-1}, d_j - 1, \ldots, d_{n-1} - 1$ vznikne skóre grafu.

Větu dokázal nejprve v roce 1955 V. Havel, profesor Vysokého učení technického v Brně, a poté nezávisle v roce 1962 S. L. Hakimi,



Václav Jaromír Havel
1927 – 2022



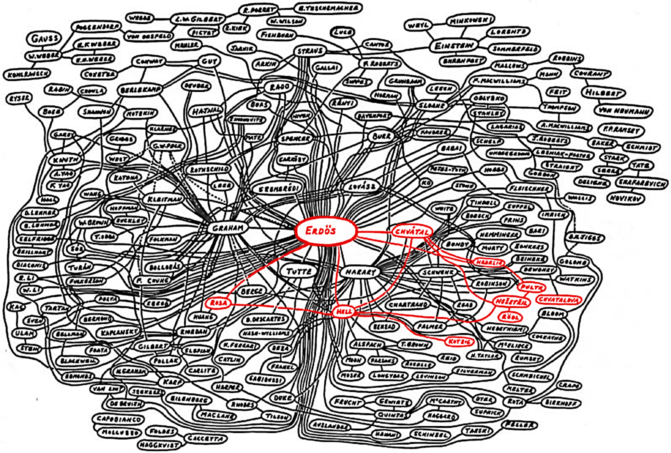
Seifollah Louis Hakimi
1932 – 2006

íránsko-americký matematik, pocházející z židovské rodiny, profesor na Northwestern Univ. a na Univ. of California, Davis.

Podgrafy

. . . situace kdy chceme popsat je část vztahů,
čili se zaměříme jen na některé vrcholy a některé hrany.

Ukázka: P. Erdős a českoslovenští matematici v Erdősově grafu:



[F. Harary: The Erdős collaboration graph, Topics in Graph Theory, Ann. N.Y. Acad. Sci. vol. 328, pp. 1—2, 1979]

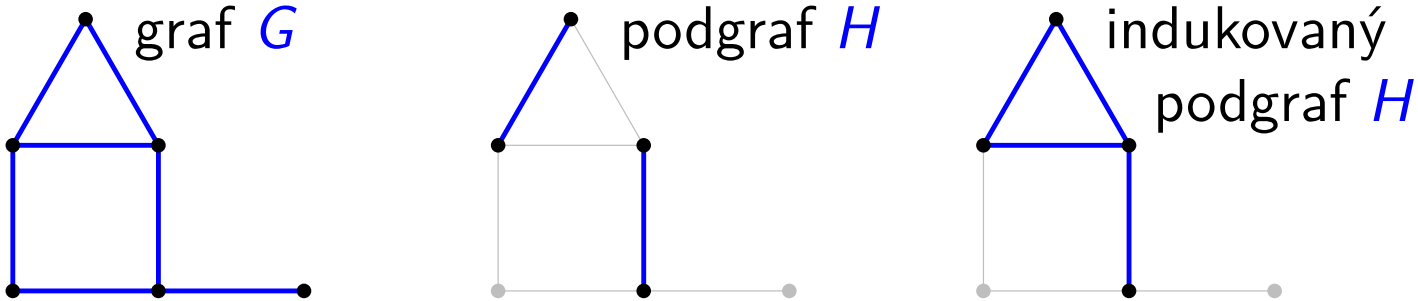
Podgrafy

. . . situace kdy chceme popsat je část vztahů,
čili se zaměříme jen na některé vrcholy a některé hrany.

Definice:
Graf $H = (V_H, E_H)$ je *podgrafem* grafu $G = (V_G, E_G)$,
pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq E_G \cap \binom{V_H}{2}$.

Graf H je navíc podgrafem *indukovaným* množinou V_H,
pokud u hran platí rovnost namísto inkluze, čili $E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2}$.

Ukázka:



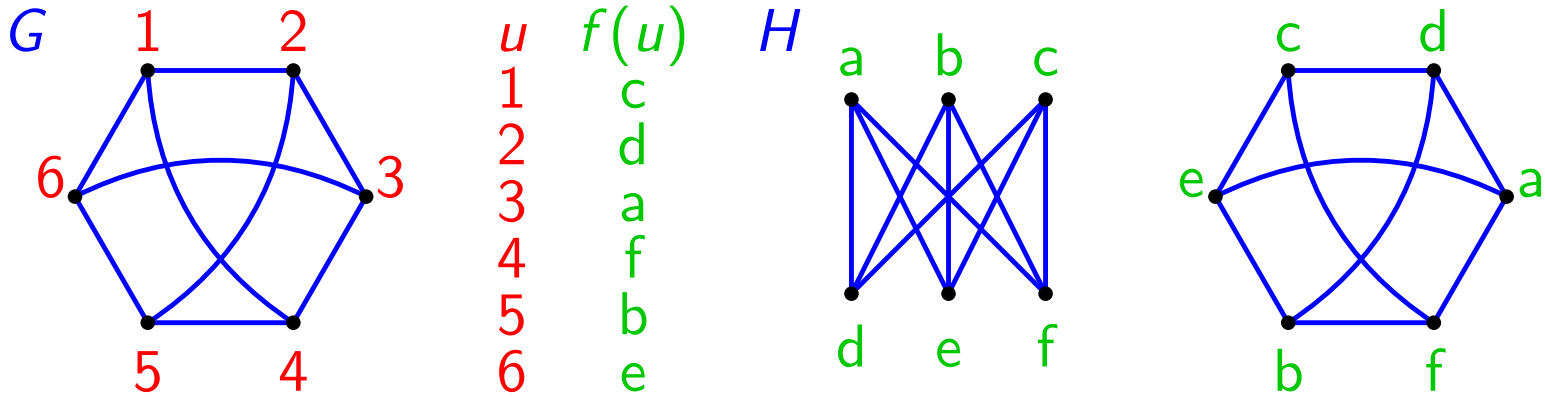
Indukovaný podgraf obsahuje všechny hrany grafu G,
které mají oba konce ve zvolené množině V_H.

Isomorfismus grafů

. . . popisuje vztah mezi dvěma grafy,
které se liší jen názvy vrchlolů, ale jinak mají stejnou strukturu.

Definice: Graf G je *isomorfní* grafu H pokud existuje
vzájemně jednoznačné zobrazení $f : V_G \to V_H$ splňující:
$\forall u, v \in V_G : (u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H$.

Ukázky:



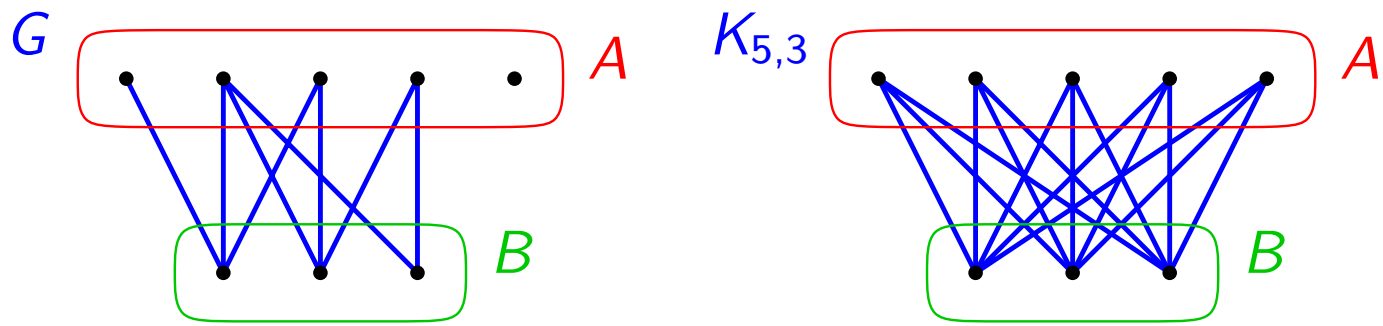
Graf K_n má $\binom{n}{5}$ (indukovaných) podgrafů isomorfních K_5,
. . . každá pětiprvková podmnožina indukuje K_5,
a $n\binom{n-1}{2}$ podgrafů isomorfních P_3 . . . vybereme střed a dva konce.

Bipartitní grafy

. . . grafy, v nichž hrany vedou jen mezi dvěma skupinami vrcholů

Definice: Graf $G = (V, E)$ se nazývá *bipartitní*, jde-li V rozdělit na dvě disjunktní množiny A a B, a každá hrana vede mezi A a B:
$\exists A, B \subseteq V : V = A \dot\cup B \wedge \forall e \in E : (e \cap A \neq \emptyset \wedge e \cap B \neq \emptyset)$

Ukázka:



Definice:
Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ je takový bipartitní graf, který má všechny hrany mezi množinami A velikosti m a B velikosti n.

Pozorování: Každý bipartitní graf je podgrafem nějakého úplného bipartitního grafu.

Grafy bez trojúhelníků

Pozorování: Bipartitní grafy nemají „trojúhelník“ C_3 jako podgraf.

Pozorování: Úplné bipartitní grafy $K_{a,b}$ mají ab hran.

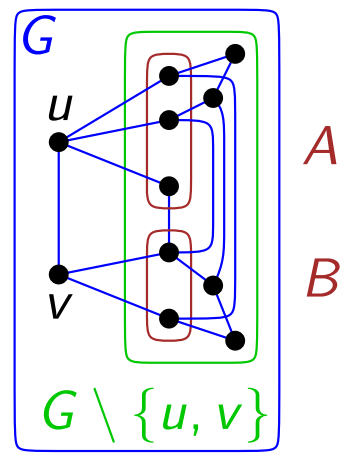
Důsledek: Pro sudé n platí, že $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ má $\frac{n^2}{4}$ hran a nemá C_3.

Otázka: Může mít graf více hran a stále nemít trojúhelník?

Věta: Pokud G na $2k$ vrcholech nemá C_3, potom $|E_G| \leq k^2$.

Důkaz: Indukcí. Pro $k = 1$ platí rovnost na K_2; jinak $\leq$ nerovnost.
Indukční krok pro $k \geq 1$: Mějme G s $|V_G| = 2k+2$.

Zvolme $(u, v) \in E$ libovolně. V množině $V \setminus \{u, v\}$ označme A a B množiny sousedů u, resp. v.



Protože G nemá C_3, platí $A \cap B = \emptyset$,
a tudíž $|A| + |B| \leq |V_{G\setminus\{u,v\}}| = 2k$.

Graf G nemá C_3, a tak ani $G \setminus \{u, v\}$ nemá C_3.

Podle indukčního předpokladu je $|E_{G\setminus\{u,v\}}| \leq k^2$, a tak dostáváme:

$|E_G| = 1 + |A| + |B| + |E_{G\setminus\{u,v\}}| \leq 1 + 2k + k^2 = (k+1)^2$.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Každý bipartitní graf na 10 vrcholech je podgrafem nějakého
   a) $K_{5,5}$, b) $K_{5,9}$, c) $K_{5,10}$, d) $K_{1,10}$, e) $K_{1,9}$.
2. Pravda nebo lež?
   Pokud jsou si dva grafy G a H isomorfní, potom každý podgraf G je isomorfní nějakému podgrafu H.
3. Pravda nebo lež?
   Každý 2-regulární graf je isomorfní nějaké kružnici.
4. Kolik vrcholů má nejmenší 5-regulární graf, který není isomorfní K_6?
   a) žádný takový graf neexistuje, b) 7, c) 8, d) 9, e) 10.
5. Pravda nebo lež? Každý regulární bipartitní graf má obě části A a B stejně velké.

Komentář k řešení kvízu

1. Pokud má graf alespoň jednu hranu, pak větší strana může mít až 9 vrcholů a menší až 5.
2. Obraz podgrafu je podgrafem.
3. Nejmenším protipříkladem je disjunktní sjednocení dvou C_3.
4. Stačí z K_8 odebrat hrany tvořící C_8.
   Na 7 vrcholech takový graf neexistuje kvůli principu sudosti.
5. Na obou stranách je $\frac{|E|}{d}$ vrcholů, kde d je stupeň.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Kolik hran má úplný graf K_n a kolik úplný bipartitní $K_{m,n}$?
- Které cesty a které kružnice jsou izomorfní úplným grafům, resp. úplným bipartitním grafům?
- Kolik má n-vrcholový graf indukovaných podgrafů?
- Pomocí jakých zobrazení lze definovat podgrafy a indukované podgrafy?

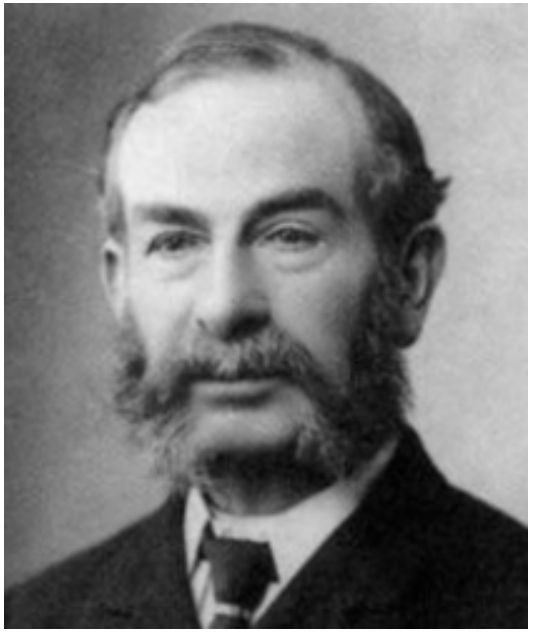
Poznámky k pojmosloví a značení

Vrcholy bývají někdy nazývány *uzly*.

Termín graf pochází od J. J. Sylvestera, který jej zavedl v roce 1878 jako synonymum pro Kekulého diagram struktury molekul.

Lze se setkat s definicí grafů, v nichž jsou hrany uspořádané dvojice. Tyto struktury se obvykle nazývají *orientované grafy*.

Zobecnění grafů v nichž jsou povoleny smyčky u vrcholů anebo násobné hrany, případně i půlhrany se nazývají *multigrafy*.



James Joseph Sylvester
1814 – 1897

Pro zdůraznění, že graf neobsahuje žádné smyčky, půlhrany ani násobné hrany se používá termín *prostý graf*.