Náhodné veličiny

. . . popisují, jakou hodnotou může skončit nějaký náhodný pokus

- počet ok na hozené kostce, případně na více kostkách
- počet orlů při hodu n mincí,
- čas doručení balíčku,
- výše škody při autonehodě,
- výsledné umístění daného závodníka,
- počet zmetků vyrobených daný den,
- počet obsloužených zákazníků,
- nejdelší délka fronty,
- v informatice maximální zaplnění bufferu,
- počet pevných bodů náhodné permutace na n prvcích.





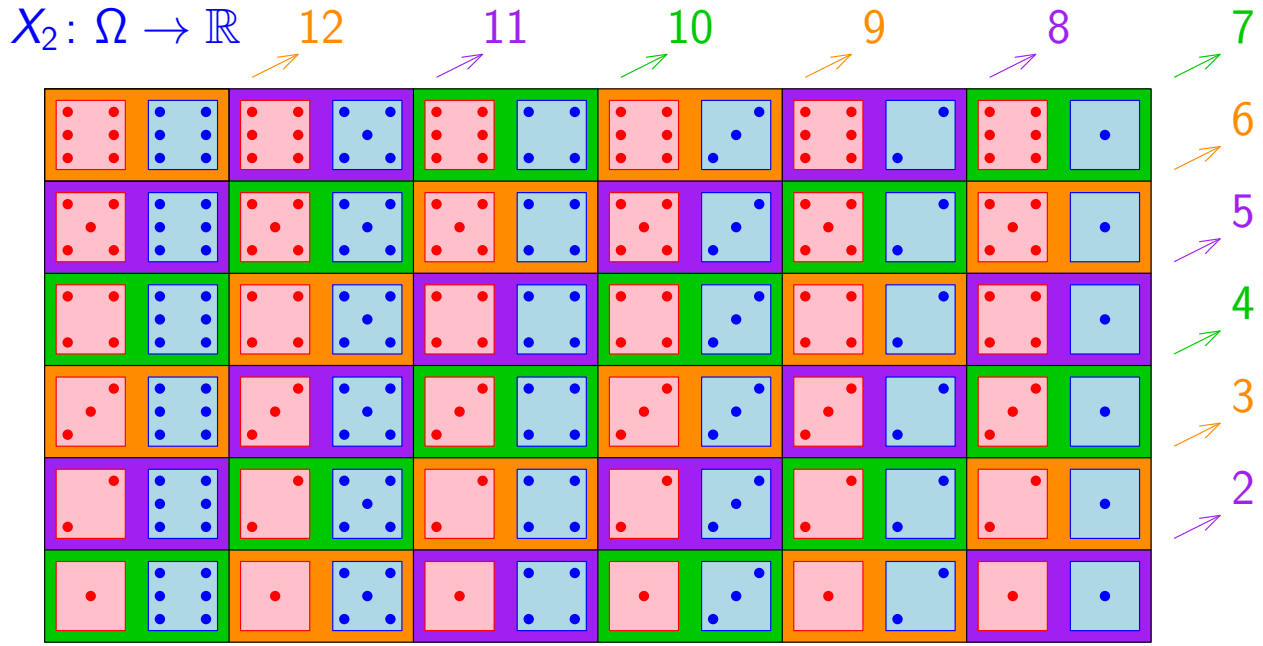
Kromě případů, co mohou v pokusu nastat . . . elementární jevy ω, treba znát i jejich ohodnocení . . . zobrazení $\Omega \to \mathbb{R}$.

Náhodná veličina

Definice: *Náhodná veličina* na diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) je zobrazení $\Omega \to \mathbb{R}$. Značí se X, X_1, Y apod.

Často jde o identitu, např. u X_1 — počtu ok na *jedné* kostce, času doručení balíčku nebo počtu zmetků. Záleží na vybudování Ω.

Ukázka: X_2 — součet ok na dvou různých kostkách:



Všimněte si, že X_2 není prosté zobrazení.

Operace s náhodnými veličinami

V rámci jednoho náhodného pokusu lze zjistit víc veličin najednou. Nové veličiny lze odvodit matematickými operacemi a funkcemi.

Ukázky:

- Rovnoměrně vybrané náhodné číslo od 0 do 5 lze získat hodem kostkou a odečtením 1, neboli jde o veličinu $X_1 - 1$.
- Index tělesné hmotnosti je náhodná veličina daná výrazem $\mathrm{BMI} = \frac{\text{hmotnost v kg}}{(\text{tělesná výška v m})^2}$.
- Hod dvěma kostkami dává nejen celkový počet ok X_2, ale i počty ok na jednotlivých kostkách. Obě tyto veličiny mají stejné rozdělení jako X_1, ale jsou definovány na jiném Ω.

Definice: Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a náhodnou veličinu X je její *α-násobek* náhodná veličina αX na téže Ω daná: $(\alpha X)(\omega) = \alpha X(\omega)$.

Součtem náhodných veličin X a Y na Ω rozumíme náhodnou veličinu $X + Y$ danou: $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Analogicky, *součin* XY je dán předpisem: $(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$.

Střední hodnota náhodné veličiny

. . . zobecnění průměrného očekávání,

jde o vážený průměr, kde váhy odpovídají pravděpodobnostem.

- Kolik šestek průměrně padne při hodu 10 kostkami?
- Jak dlouho se obvykle čeká na tramvaj?
- Jaký je průměrný plat? I když většina zaměstnanců má podprůměrný plat, má zas nadprůměrně často narozeniny. ☺



- Jaká je průměrná škoda při havárii auta, přepočteno na všechna auta daného modelu a rok?
- Jaký je obvyklý počet uživatelů přihlášených na server?
- Kolik pevných bodů má náhodně zvolená permutace n prvků?

Průměrné očekávání závisí na:

. . . hodnotách, které náhodná veličina nabývá

. . . a jejím rozdělení pravděpodobnosti.

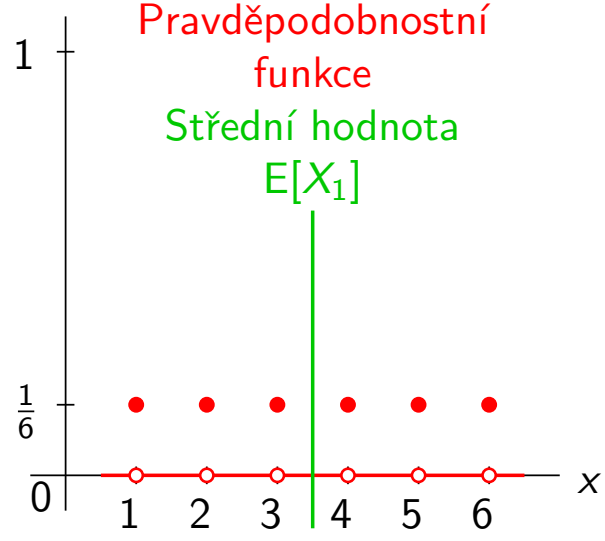
Střední hodnota náhodné veličiny

Definice: *Střední hodnota* diskrétní náhodné veličiny X na prostoru (Ω, P) je $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathrm{P}[\{\omega\}]$. Značí se $\mathrm{E}[X]$.

Na nekonečné Ω nemusí součet konvergovat; pak $\mathrm{E}[X]$ neexistuje.

Ukázka: X_1 – hod jednou kostkou

$\mathrm{E}[X_1] =$
$1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$



Pozorování: Sloučení jevů se stejnou hodnotou x náhodné veličiny X dává:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_x x\mathrm{P}[X = x],$$

přičemž stačí sčítat přes obor hodnot X.

Ukázka: X — očekávaná výhra ve hře „Liberty bell“ se 3 kostkami:

$\mathrm{E}[X] = (-1)\cdot\frac{5^3}{6^3} + 1\cdot\frac{3\cdot5^2}{6^3} + 2\cdot\frac{3\cdot5}{6^3} + 10\cdot\frac{1}{6^3} = -\frac{10}{216}$

... bankéř má průměrný zisk přibližně 4,6%!

Linearita střední hodnoty

Věta: Pro náhodné veličiny X a Y na Ω s konečnými středními hodnotami a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

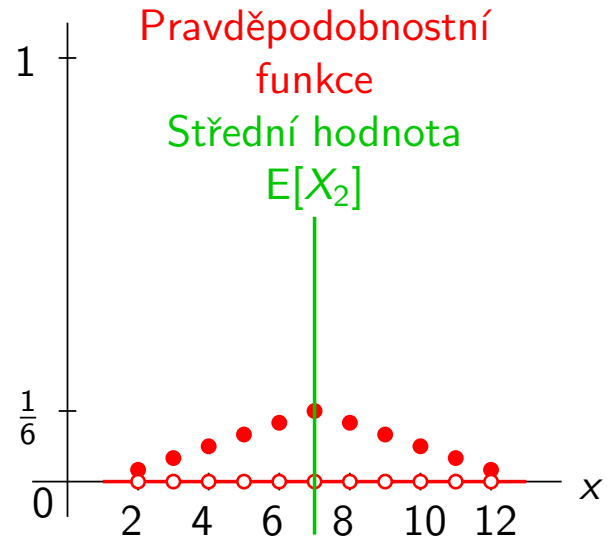
- $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y]$ (linearita vůči součtu) a
- $\mathrm{E}[\alpha X] = \alpha \mathrm{E}[X]$ (linearita vůči reálnému násobku).

Ukázka: X_2 — hod dvěma kostkami

$$\mathrm{E}[X_2] = \sum_{x=2}^{12} x\mathrm{P}[X = x] = 2 \cdot \tfrac{1}{36} + 3 \cdot \tfrac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \tfrac{1}{36} = 7$$

Y_1 — číslo na první, červené kostce
Z_1 — číslo na druhé, modré kostce
. . . *různé* veličiny na stejném Ω jako X_2.
Výpočet střední hodnoty podle předpisu $\mathrm{E}[X] = \sum_x x\mathrm{P}[X = x]$ dá

$\mathrm{E}[Y_1] = \mathrm{E}[Z_1] = \frac{7}{2} = \mathrm{E}[X_1]$, očekávaně.



Platí $X_2 = Y_1 + Z_1$, a proto $\mathrm{E}[X_2] = 7 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \mathrm{E}[Y_1] + \mathrm{E}[Z_1]$.

Linearita střední hodnoty

Věta: Pro náhodné veličiny X a Y na Ω s konečnými středními hodnotami a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

- $\mathsf{E}[X+Y] = \mathsf{E}[X] + \mathsf{E}[Y]$ (linearita vůči součtu) a
- $\mathsf{E}[\alpha X] = \alpha \mathsf{E}[X]$ (linearita vůči reálnému násobku).

Důkaz: Rozepsáním definic: $\mathsf{E}[\alpha X] = \sum_{\omega\in\Omega} (\alpha X)(\omega)\mathsf{P}[\{\omega\}]$

$= \sum_{\omega\in\Omega} \alpha X(\omega)\mathsf{P}[\{\omega\}] = \alpha \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathsf{P}[\{\omega\}] = \alpha\mathsf{E}[X]$

$\mathsf{E}[X+Y] = \sum_{\omega\in\Omega} (X+Y)(\omega)\mathsf{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega\in\Omega} (X(\omega)+Y(\omega))\mathsf{P}[\{\omega\}]$

$= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathsf{P}[\{\omega\}] + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathsf{P}[\{\omega\}] = \mathsf{E}[X] + \mathsf{E}[Y]$

Poznámka: Pomocí součinu pravděpodobnostních prostorů lze součet i součin náhodných veličin definovat obecněji i pro náhodné veličiny na *různých* prostorech. Často při opakování pokusu, např. počet orlů při n hodech mincí je součet n veličin jednotlivých hodů. Věta o linearitě střední hodnoty platí i v tomto kontextu.

Indikátor

. . . pomáhá rozložit složité náhodné veličiny na jednodušší.

Definice: *Indikátor* jevu $A \subseteq \Omega$ je náhodná veličina I_A taková, že

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A, \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A. \end{cases}$$

Pozorování: $\mathrm{E}[I_A] = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega)\mathrm{P}[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}[\{\omega\}] = \mathrm{P}[A]$.

Ukázka: Kolik průměrně padne šestek při hodu n kostkami?

Označme tuto náhodnou veličinu X. Pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ zavedeme jev A_i označující, zda na i-té kostce padla šestka.
Platí $X = I_{A_1} + \cdots + I_{A_n}$ a také $\mathrm{E}[I_{A_i}] = \mathrm{P}[A_i] = \frac{1}{6}$.

Z linearity střední hodnoty dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[I_{A_1} + \cdots + I_{A_n}] \\ &= \mathrm{E}[I_{A_1}] + \cdots + \mathrm{E}[I_{A_n}] \\ &= \mathrm{P}[A_1] + \cdots + \mathrm{P}[A_n] = \tfrac{n}{6}. \end{aligned}$$



Ukázky indikátorové metody



Hrajeme-li mariáš, kolik srdcových karet
lze očekávat v prvních pěti rozdaných kartách?

Označme tuto náhodnou veličinu X a pro i od 1 do 5
zavedeme jevy A_i obsahující ta rozdání, kde i-tá karta je srdcová.

Platí: $X = I_{A_1} + \cdots + I_{A_5}$, ale také $\mathrm{E}[I_{A_i}] = \mathrm{P}[A_i] = \frac{8 \cdot 31!}{32!} = \frac{1}{4}$.

Z linearity dostáváme: $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[I_{A_1}] + \cdots + \mathrm{E}[I_{A_5}] = \frac{5}{4}$.



Při výpočtu střední hodnoty nevadí, že jsou jevy závislé.

Zvolíme-li náhodně substituční šifru, kolik písmen zůstane
průměrně nezměněno? Neboli, jaká je střední hodnota veličiny X,
znamenající počet pevných bodů náhodné n-prvkové permutace?

Zavedeme jevy A_i obsahující permutace, kde i je pevným bodem.
Z $X = I_{A_1} + \cdots + I_{A_n}$ a $\mathrm{P}[A_i] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ plyne $\mathrm{E}[X] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak se liší náhodná veličina pro součet ok při hodu dvěma *stejnými* kostkami od veličiny X_2, kde jsou kostky různé?
- Jak by mohl vypadat pravděpodobnostní prostor pro náhodnou veličinu udávající výši škody při havárii?

Poznámky k pojmosloví a značení

Lze uvažovat i jiné náhodné veličiny než reálné.

Pravděpodobnostní funkce $\mathrm{P}[X = x]$ se někdy značí $P(x)$.

Příbuzný pojem ke střední hodnotě je *medián*.
Zjednodušeně řečeno jde o m takové, že $\mathrm{P}[X \leq m] \geq \frac{1}{2}$ i $\mathrm{P}[X \geq m] \geq \frac{1}{2}$, čili m je „uprostřed“ hodnot nabývaných X.

Střední hodnota se někdy značí μ (angl. *mean*).