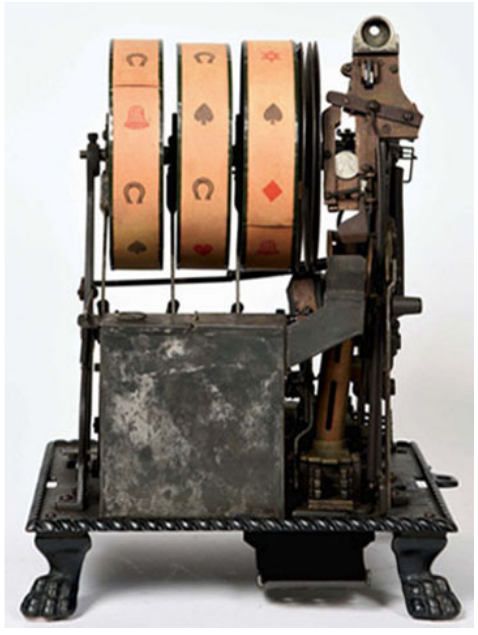
Co spojuje „Liberty bell“ s „jednorukým banditou“?

První mechanický hrací automat vyplácející výhry z roku 1894:





Jednodušší hra: hráč si vsadí na číslo od 1 do 6, hodí se 3 kostky.

Když tip – číslo nepadne ani jednou, hráč prohraje svůj vklad ☹;
padne-li 1×, hráč vyhraje výši vkladu ☺ (navíc má zpět i vklad);
padne-li 2×, vyhraje dvojnásobek vkladu ☺☺;
padne-li 3×, vyhraje *desetinásobek* vkladu ☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺!

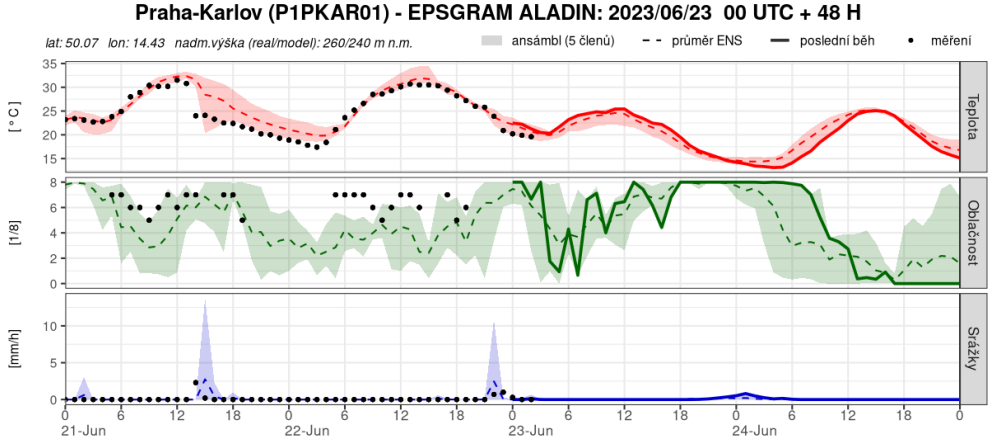
Hráli byste tuto hru?

Pravděpodobnost

. . . modeluje, jak často může nastat nějaká událost, např. zdali

- při hodu mincí padne panna nebo orel,
- při hraní mariáše dostaneme srdcovou hlášku,
- spíše přijede dřív tramvaj č. 12 než 22,
- zítra zaprší,
- během roku nabouráme auto,
- se web server nezhroutí pod náporem dotazů,
- náhodně vybrané číslo s 1 000 ciframi je prvočíslo.







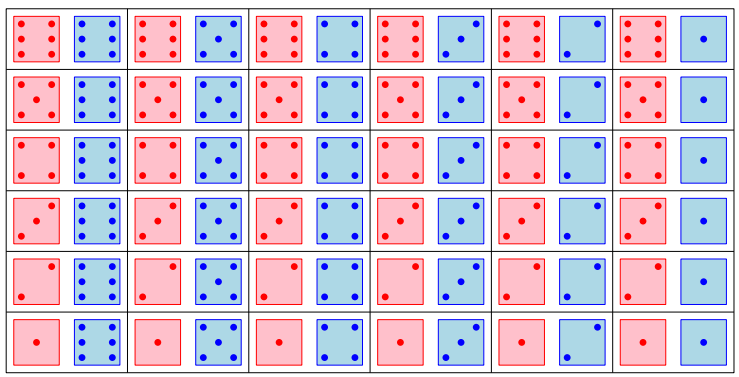
Jevy a pravděpodobnost

. . . co je třeba pro popis pravděpodobnosti znát?

- množinu Ω všech možných jednotlivých vzájemně odlišných případů, které mohou nastat, těm se říká *elementární jevy*,
- u kterých podmnožin $A \subseteq \Omega$, tzv. *jevů*, má smysl uvažovat pravděpodobnost P,
- což je zobrazení přiřazující jevu A číslo $\mathrm{P}[A]$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

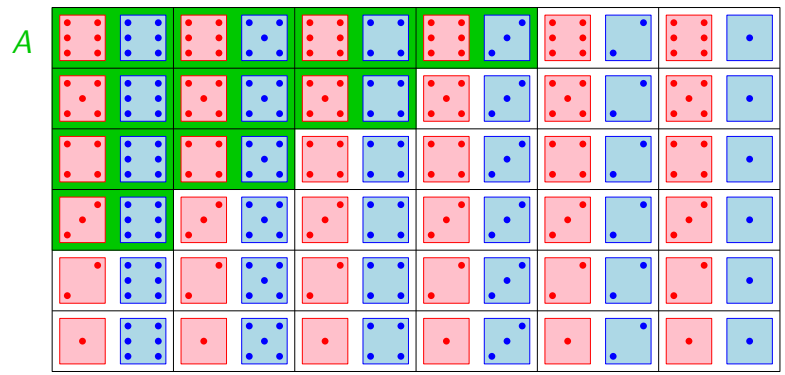
Ukázky:

Hod dvěma různými kostkami



Elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{36}$.

Jev A „součet je alespoň 9“



má pravděpodobnost $\mathrm{P}[A] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

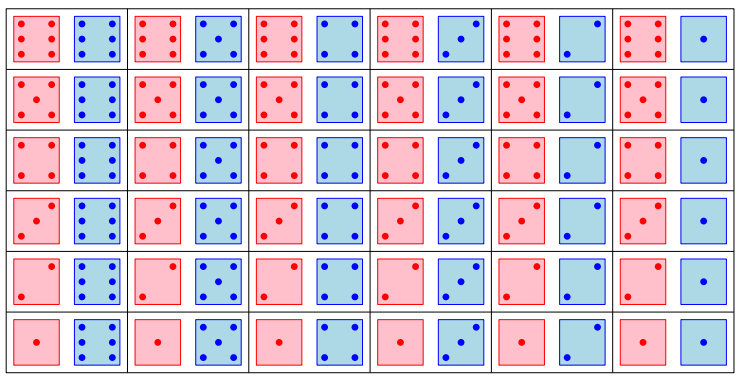
Jevy a pravděpodobnost

. . . co je třeba pro popis pravděpodobnosti znát?

- množinu Ω všech možných jednotlivých vzájemně odlišných případů, které mohou nastat, těm se říká *elementární jevy*,
- u kterých podmnožin $A \subseteq \Omega$, tzv. *jevů*, má smysl uvažovat pravděpodobnost P,
- což je zobrazení přiřazující jevu A číslo $\mathsf{P}[A]$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

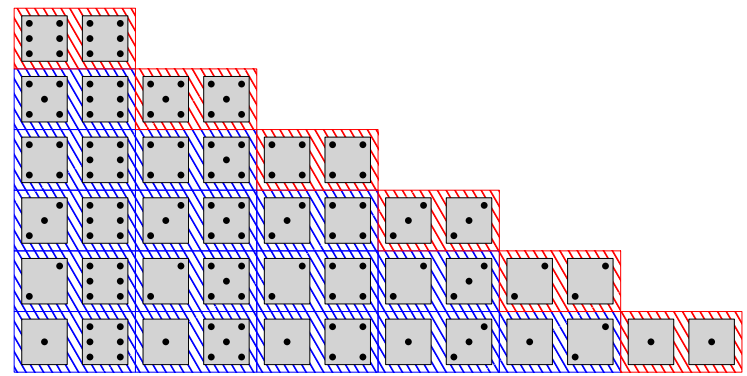
Ukázky:

Hod dvěma různými kostkami



Elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{36}$.

Hod dvěma stejnými kostkami



Pravděpodobnosti elem. jevů se mohou lišit: $\mathsf{P}_1 = \frac{1}{36}$, $\mathsf{P}_2 = \frac{2}{36}$.

Jevy a pravděpodobnost

. . . co je třeba pro popis pravděpodobnosti znát?

- množinu Ω všech možných jednotlivých vzájemně odlišných případů, které mohou nastat, těm se říká *elementární jevy*,
- u kterých podmnožin $A \subseteq \Omega$, tzv. *jevů*, má smysl uvažovat pravděpodobnost P,
- což je zobrazení přiřazující jevu A číslo $\mathrm{P}[A]$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Ukázky:

„Balíček vám doručíme mezi 10. a 15. hodinou.“

Elementární jev je čas doručení, čili reálné číslo mezi 10 a 15.

Množina všech elementárních jevů je interval $\Omega = \langle 10, 15 \rangle$.

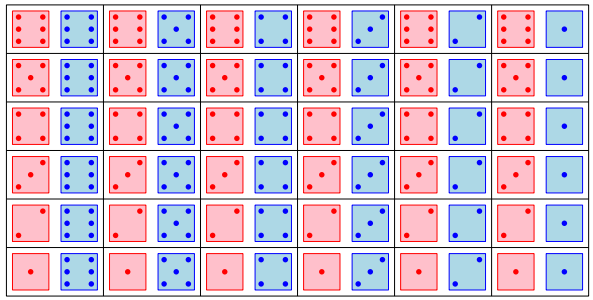
Za jev A lze vzít interval doručení $\langle a, b \rangle : 10 \leq a \leq b \leq 15$.

Pravděpodobnost doručení v intervalu $A = \langle a, b \rangle$ je $\mathrm{P}[A] = \frac{b-a}{5}$.

. . . pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů $a \in \Omega$ coby jednoprvkových intervalů $\langle a, a \rangle$ jsou nulové!

Pravděpodobnostní prostor

Definice: *Diskrétní pravděpodobnostní prostor* je tvořen spočetnou množinou Ω a zobrazením $\mathrm{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \langle 0, 1\rangle$ splňujícím: $\mathrm{P}[A] = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}[\{\omega\}]$ a také $\mathrm{P}[\Omega] = 1$.



... všechny podmnožiny Ω jsou jevy.

V *klasickém pravděpodobnostním prostoru* je Ω konečná a $\forall A \subseteq \Omega\colon \mathrm{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Ukázka: Prostor hodů dvěma různými kostkami má 36 elem. jevů, $2^{36} = 68\,719\,476\,736$ jevů, a pravděpodobnost splňuje $\mathrm{P}[A] = \frac{|A|}{36}$.

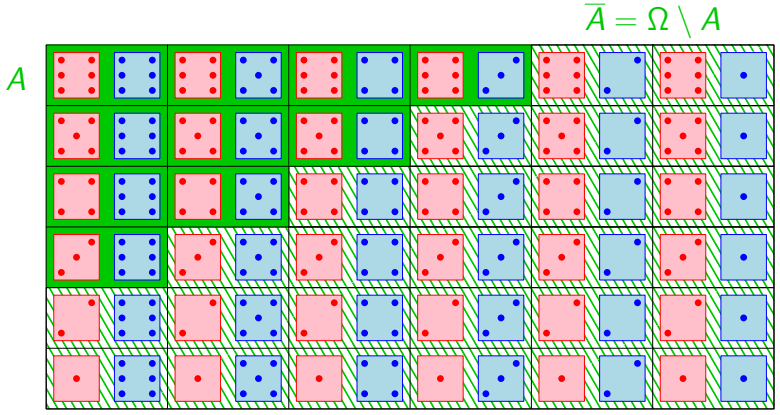
Vlastnosti:

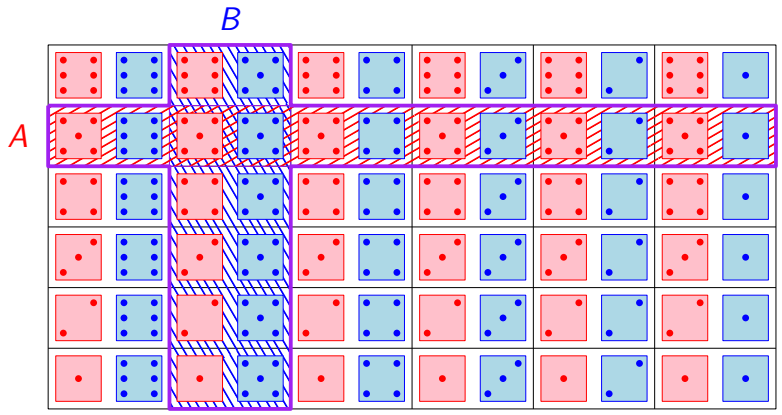
- $\mathrm{P}[\emptyset] = 0$ ... pravděpodobnost, že nenastane ani jeden z možných případů, je nulová.
- $\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] = \mathrm{P}[A \cup B] + \mathrm{P}[A \cap B]$, speciálně $\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] = \mathrm{P}[A \cup B]$, pokud $A \cap B = \emptyset$.
- $\mathrm{P}[\Omega \setminus A] = 1 - \mathrm{P}[A]$ ... jevy A a $\Omega \setminus A$ se navzájem doplňují v Ω i co do pravděpodobnosti.

Ukázky

Jev „v součtu padne nejvýše 8“ je *doplňkový* k jevu A: „v součtu padne alespoň 9“ a značí se $\overline{A}$.

Jeho pravděpodobnost je $\mathrm{P}[\overline{A}] = 1 - \mathrm{P}[A] = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$





Jev „alespoň na jedné kostce padne 5“ lze vyjádřit sjednocením jevů A: „na červené padne 5“ a B: „na modré padne 5“.

Má pravděpodobnost
$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$.

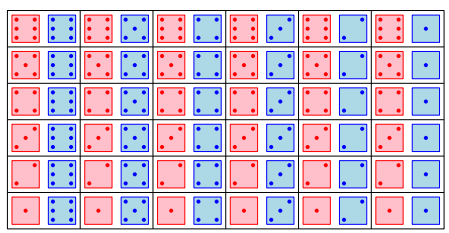
Součin pravděpodobnostních prostorů

Jaké pravděpodobnostní prostory dostáváme při opakování náhodného pokusu, například při opakování hodu kostkou?
Co když provedeme více různých nezávislých náhodných pokusů?
Co má pro pravděpodobnost platit v takových prostorech?

Například: Máme stroj, který má hlavní řídící systém s poruchovostí 5 % a navíc i nezávislý záložní řídící systém s poruchovostí 1 %.
Jaké jevy s jakou pravděpodobností mohou u tohoto stroje nastat?

Definice: *Součin* diskrétních pravděpodobnostních prostorů (Ω_1, P_1) a (Ω_2, P_2) je prostor $(\Omega_1 \times \Omega_2, P)$, kde pro každé dva elementární jevy $\omega_1 \in \Omega_1$ a $\omega_2 \in \Omega_2$ platí: $P((\omega_1, \omega_2)) = P_1(\omega_1)P_2(\omega_2)$.

Ukázky: Prostor hodu dvěma kostkami je druhou mocninou prostoru hodu jednou kostkou:



Prostor stavů stroje:

oba ☺ 94,05 %	hlavní ☹ 4,95 %
záložní ☹ 0,95 %	oba ☹☹ 0,05 %

Ukázka výpočtu pravděpodobnosti

Úloha: Jaká je pravděpodobnost p_n, že se ve skupině n osob najdou alespoň dva lidé, co mají narozeniny ve stejný den?

Řešení: Pro jednoduchost uvažujme jen roky o 365 dnech.
Množinu Ω tvoří možnosti, kdy může mít n osob narozeniny.
Každé $\omega \in \Omega$ je *zobrazení* z množiny osob do množiny dnů.
Všech takových zobrazení je $|\Omega| = 365^n$. Nechť $\mathrm{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{365^n}$.
Má-li nějaká dvojice stejné narozeniny, zobrazení *není prosté*
Označme $A_n \subseteq \Omega$ množinu těchto zobrazení, co nejsou prostá.

Třeba určit $p_n = \mathrm{P}[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega|}$.

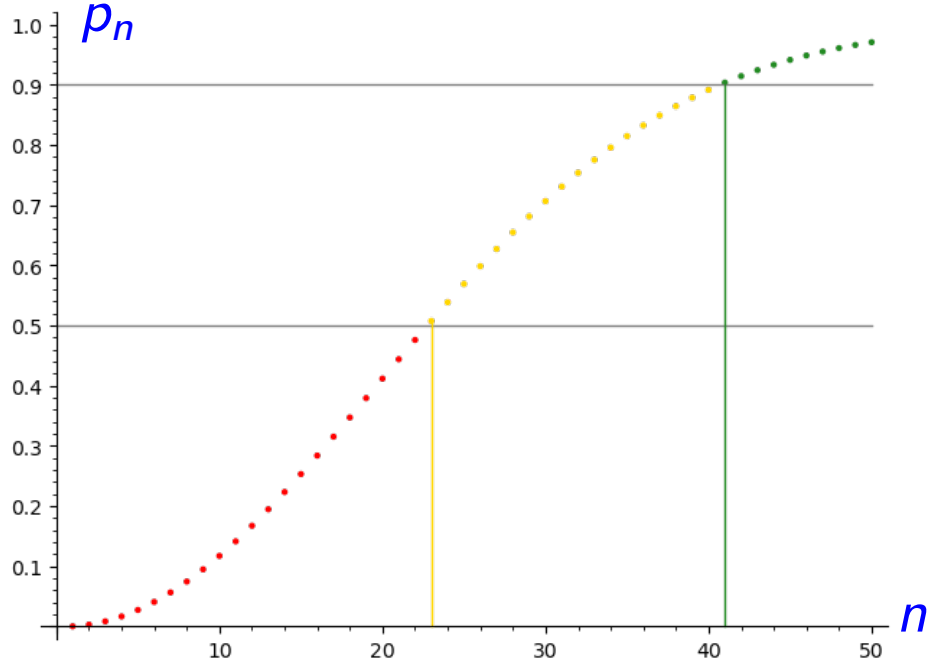
Prostých zobrazení je:

$$365^{\underline{n}} = \frac{365!}{(365-n)!}$$

Zbylých je: $|A_n| = 365^n - 365^{\underline{n}}$

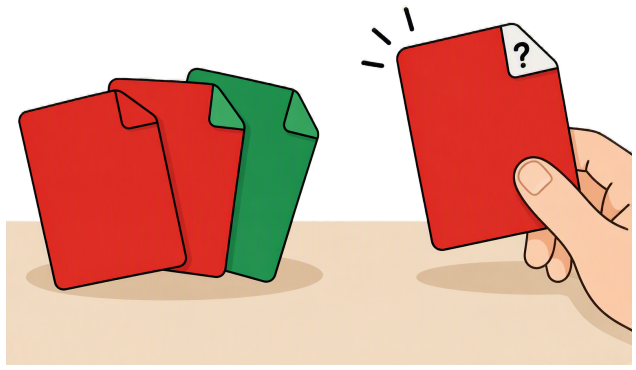
Hledaná pravděpodobnost je:

$$p_n = \frac{365^n - 365^{\underline{n}}}{365^n} = 1 - \frac{365^{\underline{n}}}{365^n}$$



Bertrandův "paradox"

Máme tři karty: jedna má obě strany červené, druhá obě zelené a třetí jednu červenou a druhou zelenou.



Náhodně jednu kartu vytáhneme a uvidíme červenou stranu.

Jaká je pravděpodobnost P, že i druhá strana je červená?

Intuitivně: Karty s červenými stranami jsou dvě, takže $\frac{1}{2}$.

Řešení: Označme karty CC, CZ, ZZ.
Strany karet jsou fyzicky různé, čili máme 6 elementárních jevů:
$\Omega = \{\underline{C}C, C\underline{C}, \underline{C}Z, C\underline{Z}, \underline{Z}Z, Z\underline{Z}\}$ — viděná strana je podtržená.

Nastal jev $\{\underline{C}C, C\underline{C}, \underline{C}Z\}$, všechny tyto možnosti jsou stejně pravděpodobné, ale ve 2 z nich je druhá strana červená: $P = \frac{2}{3}$.

Podmíněná pravděpodobnost

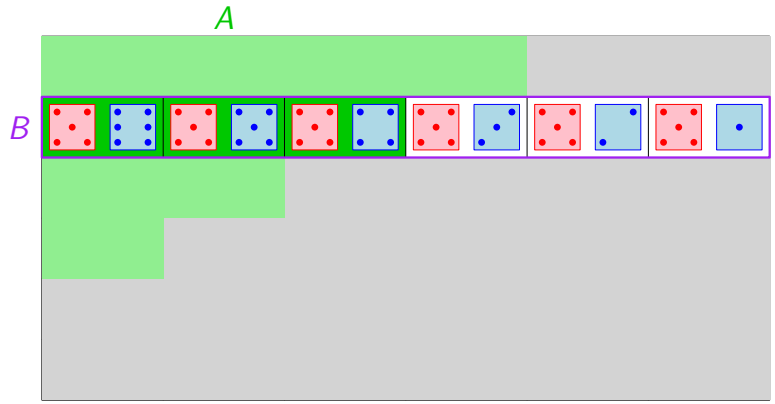
. . . vyjadřuje změnu pravděpodobnosti, pokud se vyskytne nějaká nová informace, která zúží počet možností.

Například, pravděpodobnost, že mezi 12 kartami je srdcová hláška (král a svršek) je $\binom{30}{10}\binom{32}{12}^{-1} = \frac{30!\,20!\,12!}{20!\,10!\,32!} = \frac{12\cdot 11}{32\cdot 31} = \frac{33}{248} \doteq 13\%$

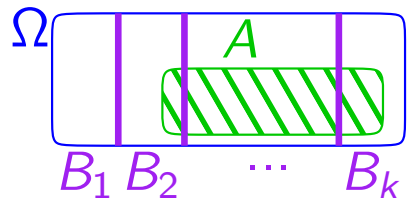
Je-li mezi prvními pěti kartami jen srdcový král, pravděpodobnost se zvýší téměř na dvojnásobek $\binom{26}{6}\binom{27}{7}^{-1} = \frac{26!\,20!\,7!}{20!\,6!\,27!} = \frac{7}{27} \doteq 26\%$

Definice: *Podmíněná pravděpodobnost* jevu A za podmínky B, kde $\mathrm{P}[B] \neq 0$, je pravděpodobnost $\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A\cap B]}{\mathrm{P}[B]}$.

Ukázka:
Pravděpodobnost hodu alespoň 9 (jev A) za podmínky, že na červené kostce je 5 (jev B) je $\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A\cap B]}{\mathrm{P}[B]} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{2}$.



Věta o úplné pravděpodobnosti



Věta: Jsou-li $B_1, \ldots, B_k$ disjunktní jevy pokrývající celé Ω, pak pro každý jev A platí:

$$\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[A|B_1]\mathrm{P}[B_1] + \mathrm{P}[A|B_2]\mathrm{P}[B_2] + \cdots + \mathrm{P}[A|B_k]\mathrm{P}[B_k]$$

Důkaz: Jev A lze pokrýt průniky $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_k$, přičemž:
$\mathrm{P}[A \cap B_i] = \mathrm{P}[A|B_i]\mathrm{P}[B_i]$.

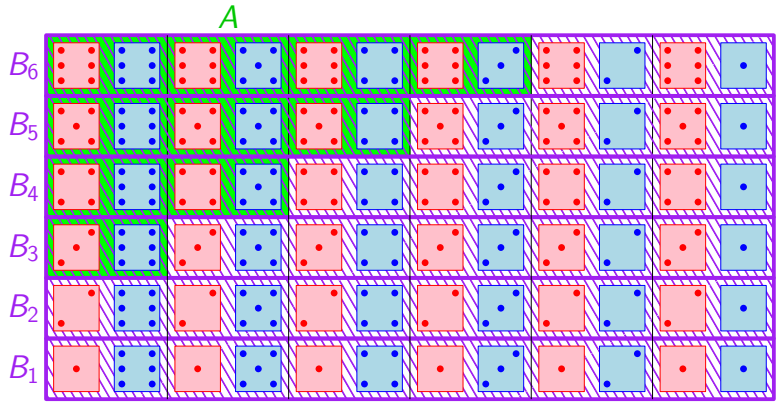
Potom: $\mathrm{P}[A] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}[A|B_i]\mathrm{P}[B_i]$

Ukázka:

A ... padlo v součtu alespoň 9

B_i ... na červené padlo i

$$\mathrm{P}[A] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{18}$$



Bayesův vzorec

Věta: Jsou-li jevy $B_1, \ldots, B_k$ disjunktní a pokrývají-li celé Ω, pak pro každý jev A a každé j platí:

$$\mathrm{P}[B_j|A] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B_j]}{\mathrm{P}[A]} = \frac{\mathrm{P}[A|B_j]\mathrm{P}[B_j]}{\mathrm{P}[A]} = \frac{\mathrm{P}[A|B_j]\mathrm{P}[B_j]}{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}[A|B_i]\mathrm{P}[B_i]}$$

Použití:
Víme, jak se nějaký test (jev A) chová na ověřených případech (pravděpodobnosti $\mathrm{P}[A|B_i]$) a chceme usoudit, který případ (jev B_i) nejspíše nastal, když se test A zdaří (čili $\mathrm{P}[B_i|A]$).



Aplikace ve zdravotnictví, testování kvality, umělé inteligenci apod.

Často pro dva doplňkové jevy B_1 a $B_2 = \overline{B_1} = \Omega \setminus B_1$.

Použití Bayesova vzorce [Štěpán, Zvára, 2006, Příklad 2.7]

Ví se, že nemoc postihuje 0,5 % populace (*prevalence*).
Její test ukáže pozitivní výsledky u 99,9 % nemocných pacientů (*senzitivita*), a negativní u 99 % zdravých (*specificita*).
S jakou pravděpodobností je pacient nemocný, má-li test pozitivní?
S jakou pravděpodobností je pacient zdravý, má-li test negativní?
Jevy: A — pacienti s pozitivním testem, B — nemocní pacienti,

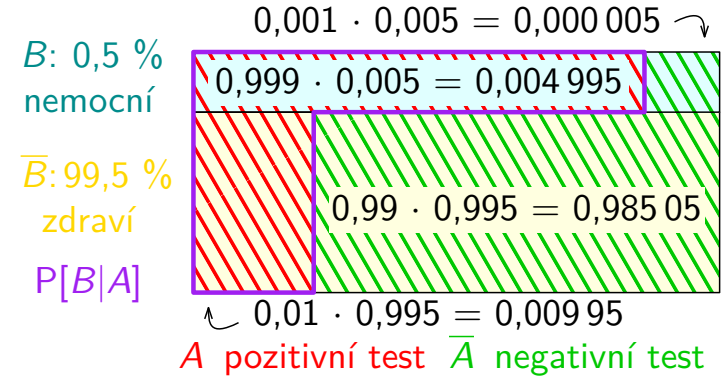
B_i	$\mathrm{P}[B_i]$	$\mathrm{P}[A\|B_i]$	$\mathrm{P}[\overline{A}\|B_i]$
B	0,005	0,999	0,001
$\overline{B}$	0,995	0,01	0,99

$$\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[A|B]\mathrm{P}[B] + \mathrm{P}[A|\overline{B}]\mathrm{P}[\overline{B}] = 0{,}014\,945$$

$$\mathrm{P}[B|A] = \frac{\mathrm{P}[A|B]\mathrm{P}[B]}{\mathrm{P}[A]} \doteq 0{,}334\,225$$

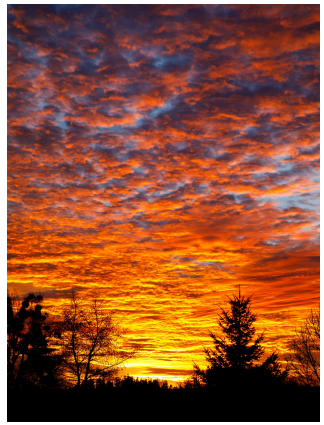
$$\mathrm{P}[\overline{B}|\overline{A}] = \frac{\mathrm{P}[\overline{A}|\overline{B}]\mathrm{P}[\overline{B}]}{\mathrm{P}[\overline{A}]} \doteq 0{,}999\,995$$

Pozitivní výsledek testu jen málo odpovídá správné diagnóze $\mathrm{P}[B|A] \doteq 33\,\%$, protože jevy $A \cap B$ a $A \cap \overline{B}$ jsou podobně pravděpodobné.
Ovšem pro vyvrácení diagnózy je test dostatečně spolehlivý.



Při prevalenci $\mathrm{P}[B] = 5\%$, má *stejný* test $\mathrm{P}[B|A] \doteq 84\,\%$.

Použití Bayesova vzorce pro více jevů B_i



Říká se: „Večerní červánky věští pěkný den.“
Dejme tomu, že polovina dní je slunečných a červánky jim předcházejí v 10 %. Dvě pětiny jsou zatažené, jim předcházejí červánky v 5 % případů. Zbylé dny jsou deštivé a po červáncích nastanou v 1 % případů.

Do jaké míry by šlo pranostice věřit? *

Jevy: A — červánky, B_1, B_2, B_3 — slunečno, zataženo, deštivo.
Pravděpodobnosti: $\mathrm{P}[A] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{71}{1\,000}$

	$\mathrm{P}[B_i]$	$\mathrm{P}[A\|B_i]$	$\mathrm{P}[B_i\|A]$
B_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1\,000}{71} = \frac{50}{71} \doteq 75\,\%$
B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1\,000}{71} = \frac{20}{71} \doteq 24\,\%$
B_3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1\,000}{71} = \frac{1}{71} \doteq 1\,\%$

Odpověď: Asi ve $\frac{3}{4}$ případů by po červáncích mělo být slunečno.

* Data nejsou skutečná, protože červánky nejsou sledovaný meteorologický jev.

Nezávislé jevy

. . . výsledek jednoho jevu neovlivní pravděpodobnosti ostatních.

Definice: Jevy A a B jsou *nezávislé*, pokud $\mathrm{P}[A \cap B] = \mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]$.

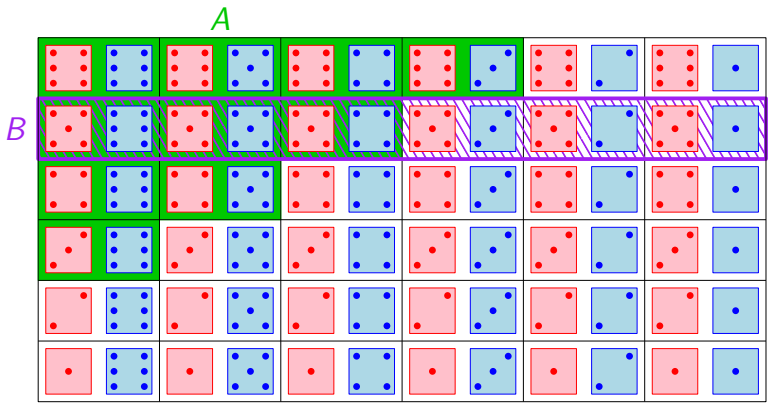
. . . nezávislé A a B splňují: $\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B]}{\mathrm{P}[B]} = \frac{\mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]}{\mathrm{P}[B]} = \mathrm{P}[A]$.

Obecně, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou nezávislé, když pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ platí: $\mathrm{P}\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} \mathrm{P}[A_i]$.

Ukázka: Závislé jevy:

A „součet je alespoň 9“ a

B „na první kostce padla 5“.

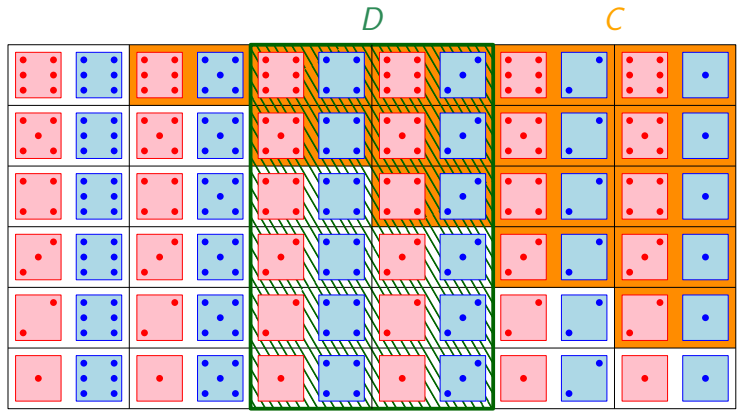


$\mathrm{P}[A \cap B] = \frac{3}{36}$

$\neq \frac{5}{108} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{6} = \mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]$

Nezávislé jevy: C „na červené padlo víc než na modré“ a

D „na modré padlo 3 nebo 4“.



$\mathrm{P}[C \cap D] = \frac{5}{36}$

$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[D]$

Nezávislé jevy

. . . výsledek jednoho jevu neovlivní pravděpodobnosti ostatních.

Definice: Jevy A a B jsou *nezávislé*, pokud $\mathrm{P}[A \cap B] = \mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]$.

. . . nezávislé A a B splňují: $\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B]}{\mathrm{P}[B]} = \frac{\mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]}{\mathrm{P}[B]} = \mathrm{P}[A]$.

Obecně, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou nezávislé, když pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ platí: $\mathrm{P}\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} \mathrm{P}[A_i]$.

Ukázka: Jev E „na červené padlo 3 nebo 4“ je nezávislý na C i na D.

$\mathrm{P}[C \cap E] = \frac{5}{36} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[E]$

$\mathrm{P}[D \cap E] = \frac{1}{9} = \mathrm{P}[D]\mathrm{P}[E]$

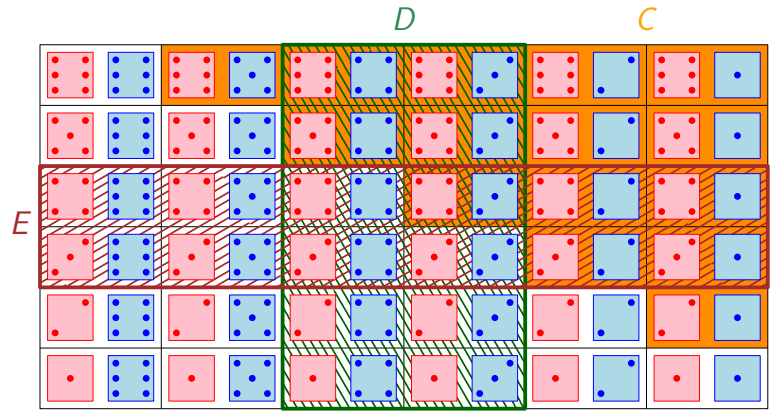
Pozor! Nezávislost dvojic *nezaručuje* nezávislost všech.

Všechny tři nezávislé nejsou:

$\mathrm{P}[C \cap D \cap E] = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{108}$

$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[D]\mathrm{P}[E]$

Nezávislé jevy: C „na červené padlo víc než na modré“ a D „na modré padlo 3 nebo 4“.



$\mathrm{P}[C \cap D] = \frac{5}{36}$

$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[D]$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik elementárních jevů má prostor pro pokus, v němž z koše obsahujícího 1 bílý, 4 žluté a 4 modré míčky (jinak než barvou nerozlišitelné) vybíráme najednou 3 míčky?
   a) 3, b) 7, c) 9, d) 12, e) 16, f) 84.
2. Pravda nebo lež? Elementární jevy z předchozí otázky mají stejnou pravděpodobnost.
3. Pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami padnou celkem tři oka je: a) $\frac{1}{3}$, b) $3 \cdot \frac{1}{6}$, c) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$, d) $\left(\frac{1}{6}\right)^3$, e) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$.
4. Pravděpodobnost, že při třech hodech spravedlivou mincí padla alespoň dvakrát panna, za podmínky, že v prvních dvou hodech padl nejvýše jeden orel, je:
   a) 0, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{3}{8}$, e) $\frac{1}{3}$, f) $\frac{1}{2}$, g) $\frac{2}{3}$, h) $\frac{5}{8}$, i) $\frac{3}{4}$, j) $\frac{5}{6}$, k) 1.
5. Pravda nebo lež?
   Hodíme-li pětkrát mincí, pak jevy „padl lichý počet orlů“ a „v obou prvních dvou hodech padla panna“ jsou nezávislé.

Komentář k řešení kvízu

1. $\Omega = \{\circ\bullet\bullet, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet\}$
2. Některé možnosti je možné složit z více, jiné z méně možností „fyzických“ míčků (jako u hodů dvěma stejnými kostkami). Např. $\mathrm{P}[\bullet\bullet\bullet] = \frac{4}{84} = \frac{1}{14}$, ale $\mathrm{P}[\circ\bullet\bullet] = \frac{16}{84} = \frac{2}{7}$.
3. Tento výsledek nelze získat jinak, než že na každé kostce padne 1, což má pokaždé pravděpodobnost $\frac{1}{6}$.
4. Padla alespoň dvakrát panna $A = \{PPP, PPO, POP, OPP\}$, v prvních dvou hodech padl nejvýše jeden orel $B = \{PPP, PPO, POP, POO, OPP, OPO\}$, $\mathrm{P}[A|B] = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{4}{6}$.
5. Lichý počet orlů: $|A| = 16$, první dva hody panna: $|B| = 8$, oba jevy: $|A \cap B| = 4$, protože buď padnou tři orli (jedna možnost: $PPOOO$) nebo jeden (tři možnosti: $PPOPP$, $PPPOP$ a $PPPPO$) a $\frac{16}{32} \cdot \frac{8}{32} = \frac{4}{32}$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak souvisejí pravidla pro množinové operace (např. distributivní zákon) s výpočtem pravděpodobností jevů? Kdy jsou třeba dodatečné podmínky?
- Může mít pravděpodobnostní prostor nekonečnou množinu elementárních jevů a přitom každý elementární jev nenulovou pravděpodobnost? Případně, mohou mít jen některé jevy nenulovou pravděpodobnost?
- Co by se stalo, kdyby ve větě o úplné pravděpodobnosti nebyly jevy $B_1, \ldots, B_k$ disjunktní, ale přesto pokrývaly Ω?
- Je nějaká souvislost mezi množinovou inkluzí $A \subseteq B$ a (ne)závislostí těchto jevů?
- Dostali bychom ekvivalentní definici nezávislosti, pokud bychom podmínku omezili jen na množinu $\{1, \ldots, k\}$ a vynechali všechny její vlastní podmnožiny $I \subsetneq \{1, \ldots, k\}$?

Poznámky k pojmosloví a značení

Pravděpodobnost lze psát verzálkou P, i s oblými závorkami $p(A)$.

Bývá zvykem označit pomocí $\mathcal{F}$ množinu všech uvažovaných jevů.
U diskrétních pravděpodobnostních prostorů je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Jevu Ω s pravděpodobností 1 se říká *jistý*,
zatímco jev $\emptyset$ pravděpodobnosti 0 je *nemožný*.

U podmíněné pravděpodobnosti se jevy $B_1, \ldots, B_k$,
které se navzájem vylučují a vyčerpávají všechny možnosti,
nazývají *hypotézy* a pravděpodobnostem $\mathrm{P}[B_i]$ se říká *apriorní*.

Pravděpodobnosti, které berou v úvahu, že nastal jev A,
čili hledané $\mathrm{P}[B_i|A]$, se nazývají *aposteriorní*.