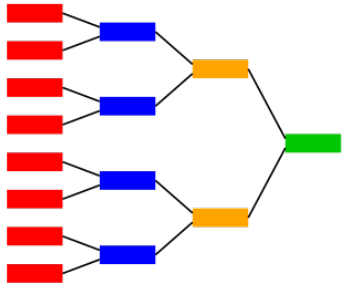
# Kombinatorické počítání

. . . úlohy vedoucí na určení počtu, například:




- Kolik je různých registračních značek aut?
- Kolik je různých cest mezi dvěma městy?
- Kolik je možných pozic ve hře šachy?
- Kolik je substitučních šifer?
- Kolik je různých možností, jak naplánovat turnaj?





- Kolik je různých IP adres?
- Kolik je různých způsobů, jak vyhodnotit dotaz v databázích?

Často jde o *konečné* množiny matematických objektů, např. prvků, dvojic, množin či zobrazení, někdy vymezené dalšími podmínkami, např. součty, nerovnostmi a podobně.

# Mohutnost množin a počet dvojic

Definice: Počet prvků konečné množiny $X$ nazýváme *mohutnost* $X$ a značíme ji $|X|$.

Pozorování: Když existuje bijekce mezi množinami $X$ a $Y$, pak $|X| = |Y|$.

Definice: *Kartézský součin* množin $X$ a $Y$ je množina $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$, čili množina *všech uspořádaných* dvojic.



René Descartes
1596 – 1650
[Obr. Wikipedie]

Pozorování: Mají-li konečné množiny $X$ a $Y$ mohutnosti $n$ a $m$, potom jejich kartézský součin $X \times Y$ má mohutnost $nm$.

Důkaz: $X \times Y$ je množina dvojic, první prvek má $n$ možností, druhý $m$. Každý výběr prvního prvku lze nezávisle rozšířit o druhý, proto je celkový počet možností dán součinem $nm$.

Ukázka: Má-li si 200 studentů zapsat 5 přednášek, dostaneme $200 \cdot 5 = 1\,000$ záznamů $(p, s)$ o zápisu přednášky $p$ studentem $s$.

# Počet $n$-tic

Věta: Z prvků konečné množiny $X$ lze vytvořit $|X|^3$ různých uspořádaných trojic. Pro $n \in \mathbb{N}$ máme $|X|^n$ uspořádaných $n$-tic.

... intuitivně: pro trojice jde o mohutnost kartézského součinu $X \times X \times X$ a pro $n$-tice $|X|^n = |\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n\text{-krát}}|$

Ukázka: IP adresu tvoří uspořádaná čtveřice čísel v rozsahu $0-255$, proto různých IP adres je $256^4 = 4\,294\,967\,296$.

Na této větě si předvedeme princip důkazu *matematickou indukcí:*

Důkaz: $P(n)$: „Na konečné $X$ je $|X|^n$ uspořádaných $n$-tic.“
I. $P(1)$: konečná $X$ má $|X|$ prvků — „uspořádaných 1-tic“,
II. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: Uspořádaných $n$-tic je podle indukčního předpokladu $|X|^n$. Každou $n$-tici lze rozšířit $|X|$ způsoby na $(n+1)$-tici přidáním prvku z $X$ na poslední, $(n+1)$. místo. Vytvoříme celkem $|X|^n \cdot |X| = |X|^{n+1}$ různých $(n+1)$-tic, protože se liší buď v prvních $n$ nebo v posledním prvku. Každou $(n+1)$-tici $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ lze takto vytvořit z $n$-tice $(x_1, \ldots, x_n)$ a prvku $x_{n+1}$, a tak žádná nechybí, ani nepřebývá.

# Matematická indukce



[Foto: Pixabay]

Výrok typu: „Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $P(n)$“,
například $P(n)$: „Na konečné $X$ je $|X|^n$ uspořádaných $n$-tic.“
lze dokázat ve dvou krocích:

I. platí $P(1)$ — *první krok* indukce,
II. pro každé $n$ lze z *indukčního předpokladu* $P(n)$ odvodit $P(n+1)$ — *indukční krok:* $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Když od $P(1)$ použijeme II. krok $(n-1)$-krát za sebou, dostaneme posloupnost implikací: $P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \cdots \Rightarrow P(n)$.

Začátek posloupnosti platí díky I., a proto platí i její ostatní členy.

Číslo $n$ může být libovolné, proto $P(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Varianty: Když místo $P(1)$ dokážeme $P(0)$, platí $P(n)$ pro všechna nezáporná celá $n$; když místo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ dokážeme $P(n) \Rightarrow P(n+2)$, platí $P(n)$ pro všechna lichá $n \in \mathbb{N}$, atd.
Indukční krok lze provést i pomocí implikace se silnějšími předpoklady: $(P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(n-1)) \Rightarrow P(n)$

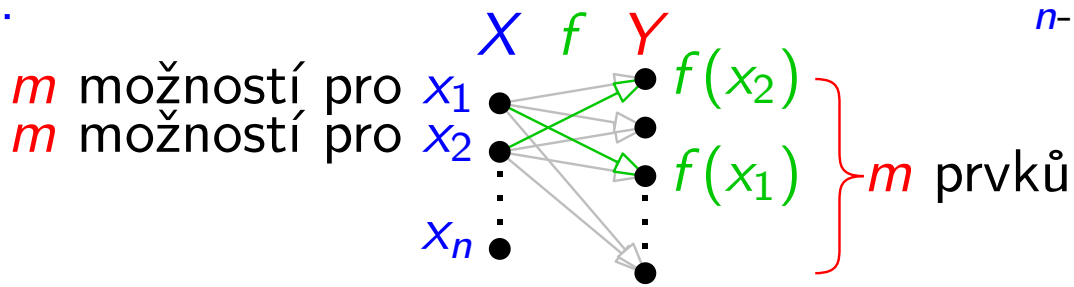
# Počet zobrazení

Věta: Mají-li konečné množiny $X$ a $Y$ mohutnosti $n$ a $m$, potom existuje $m^n$ různých zobrazení $f : X \to Y$.

Důkaz: Pokud si označíme $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, potom každé zobrazení $f$ odpovídá jednoznačně uspořádáné $n$-tici prvků z $Y$, jmenovitě $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ a těchto $n$-tic je $m^n$.

Jde o bijekci mezi množinou všech zobrazení, tj. $\{f : X \to Y\}$ a množinou všech možných $n$-tic prvků z $Y$, tj. $\underbrace{Y \times Y \times \cdots \times Y}_{n\text{-krát}}$.

Jiný pohled:




Ukázky: Pokud si 5 dětem rozdáváme ovoce tak, že každé si může vybrat jeden kus ze čtyř možných druhů (jablko, hrušky, meruňky a švestky), lze to provést $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5 = 1\,024$ způsoby.
Jde o počet zobrazení z množiny dětí do množiny druhů ovoce.

Počet slov s $n$ písmeny z $m$-prvkové abecedy je $m^n$.

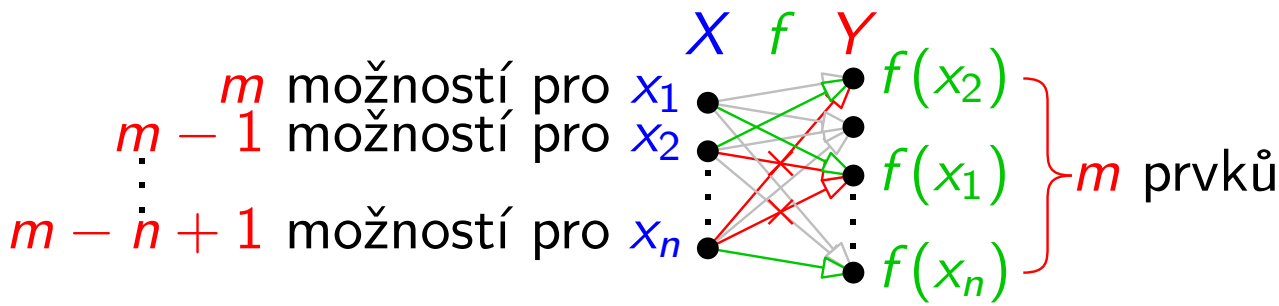
# Počet prostých zobrazení

Věta: Mají-li konečné množiny $X$ a $Y$ mohutnosti $n$ a $m$,
potom existuje $m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$
různých *prostých* zobrazení $f : X \to Y$.

... pro $n > m$ je jeden činitel nulový a žádné prosté $f$ neexistuje.

Značení: *Klesající mocnina* je $m^{\underline{n}} = m(m-1)\cdots(m-n+1)$.

Důkaz:




Ukázka: Pokud si 5 dětí vybere po jedné z 8 různých hraček,
mohou si je vybrat $8^{\underline{5}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ způsoby.

Zobrazení odpovídají uspořádaným výběrům s opakováním
(úloha o rozdávání ovoce), zatímco prostá zobrazení odpovídají
uspořádaným výběrům bez opakování (úloha o rozdávání hraček).

Důsledek: *Uspořádaných* výběrů $n$ prvků z $m$-prvkové množiny je
$m^{\underline{n}}$ pro výběry *bez opakování*, a $m^n$ pro výběry *s opakováním*.

# Faktoriál



Definice: Součin $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{i=1}^{n} i$
se nazývá $n$ *faktoriál* a značí se $n!$.

... počet prostých zobrazení pak lze vyjádřit:

$$m^{\underline{n}} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Poznámka: $0! = 1$ (odpovídá prázdnému součinu).

Důsledek: Na $n$-prvkové množině je $n!$ permutací.

Seřazení prvků množiny $X$ lze reprezentovat jako
bijekci mezi množinou pozic $\{1, \ldots, n\}$ a množinou $X$.

Důsledek: Různých seřazení prvků $n$-prvkové množiny je také $n!$.

Ukázky: Na 26 písmenech je $26!$ různých substitučních šifer.

Mezi 10 dívkami a 10 kluky lze vytvořit $10! = 3\,628\,800$ párování.

Každé párování odpovídá jednoznačně prostému zobrazení $D \to K$,
ale také uspořádání množiny $K$ (pozice určují prvky množiny $D$).

# Odhad faktoriálu



Otázka: Jak rychle roste faktoriál?

Přímočarý odhad: $n! \leq n^n$

$$(n!)^2 = (1 \cdots n)(1 \cdots n) = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k) \Rightarrow n! = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)}$$

Z nerovností $n \leq k(n+1-k) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ plyne: $n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Přesnější odhad dává tzv. *Stirlingova formule*: $n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ukázka: Odhad počtu substitučních šifer

$$\begin{aligned}
26^{26} &= 6\,156\,119\,580\,207\,157\,310\,796\,674\,288\,400\,203\,776 &&\doteq 6,16 \cdot 10^{36} \\
\left(\tfrac{27}{2}\right)^{26} &\doteq 244\,724\,799\,219\,677\,718\,672\,625\,240\,694{,}124 &&\doteq 2,45 \cdot 10^{29} \\
26! &= 403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000 &&\doteq 4,03 \cdot 10^{26} \\
\sqrt{52\pi}\left(\tfrac{26}{e}\right)^{26} &\doteq 402\,000\,993\,060\,954\,024\,530\,328\,458{,}902 &&\doteq 4,02 \cdot 10^{26} \\
26^{13} &= 2\,481\,152\,873\,203\,736\,576 &&\doteq 2,48 \cdot 10^{18}
\end{aligned}$$

Kolik je různých způsobů, jak může být uspořádán balíček 52 karet? Odpověď je 52!

**52! =**

80 658 175 170 943 878 571 660
636 856 403 766 975 289 505 440
883 277 824 000 000 000 000

$\approx 8{,}07 \times 10^{67}$



Teď si představ, že máš tolik sekund času. Co s ním uděláš?

## 1. Krok

Postav se na rovník. Udělej jeden krok každou miliardu let.



Jedno kolečko kolem Země trvá asi $1{,}26 \times 10^{24}$ sekund.

## 2. Krok

**Vypusť Tichý oceán.**

Po každém kolečku kolem Země odeber z Tichého oceánu jednu kapku vody. Pokračuj, dokud není celý Tichý oceán suchý.



Na celé vyprázdnění Tichého oceánu je potřeba asi $1{,}8 \times 10^{49}$ sekund.

## 3. Krok

**Postav papírovou věž.**

Jakmile je Tichý oceán prázdný, polož na zem jeden list papíru. Znovu naplň Tichý oceán a opakuj předchozí kroky. Po každém vyprázdnění Tichého oceánu přidej do věže další list.



## 4. Krok

**Dosáhni Slunce.**

Pokračuj, dokud tvoje papírová věž nedosáhne od Země až ke Slunci.



Postavení věže až k Slunci trvá asi $2{,}7 \times 10^{64}$ sekund.

## A teď to nejlepší...

Když to všechno uděláš, tvůj časoměr se sotva pohne.




## Použité hodnoty

- Počet sekund v roce: $3{,}15 \times 10^{7}$ s
- Délka kroku: 1,0 m
- Délka rovníku: $4{,}01 \times 10^{7}$ m
- Velikost kapky: 0,05 ml = $5 \times 10^{-8}$ m³
- Objem Tichého oceánu: $7{,}08 \times 10^{8}$ km³
- Počet kapek v Tichém oceánu: $1{,}42 \times 10^{25}$
- Tloušťka jednoho listu papíru: 0,10 mm = $1{,}0 \times 10^{-4}$ m
- Vzdálenost Země–Slunce: $1{,}5 \times 10^{11}$ m
- Počet listů papíru ve věži od Země ke Slunci: $1{,}5 \times 10^{15}$

## A ještě něco...

Tento proces (rovník → vyprázdnit Tichý oceán → papírová věž → Slunce) se dá zopakovat asi **3 000×**.

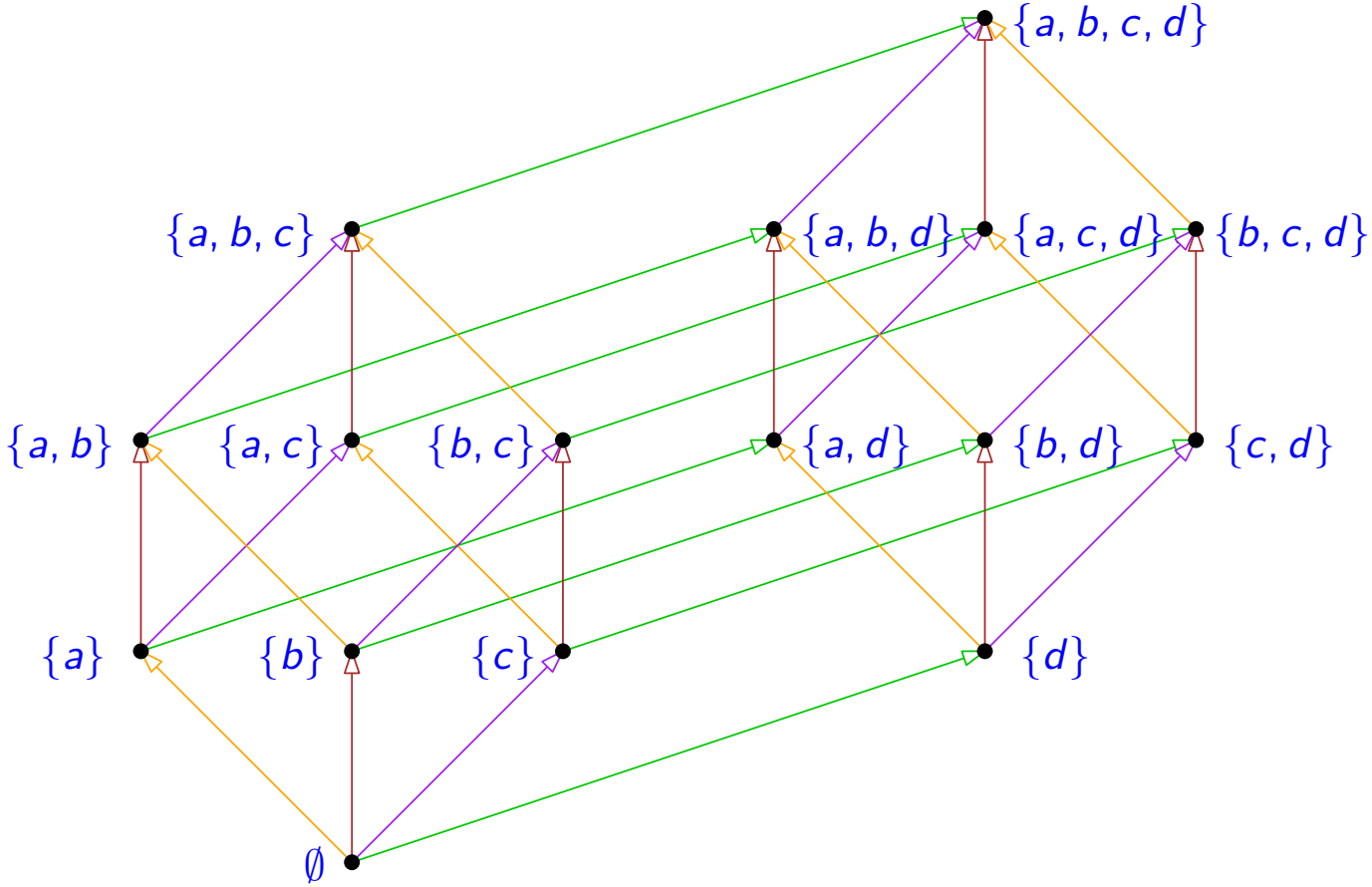



[S pomocí ChatGPT ver. GPT-5.6 Luna.]

Podle původní myšlenky Scotta Czepiela (czep.net/weblog/52cards.html).

# Počet podmnožin

Věta: Konečná množina $X$ mohutnosti $n$,
má $2^n$ různých podmnožin, neboli $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.



# Počet podmnožin

Věta: Konečná množina $X$ mohutnosti $n$,
má $2^n$ různých podmnožin, neboli $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

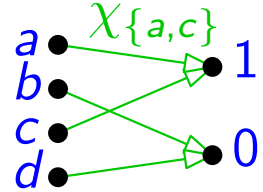
Důkaz 1: Indukcí podle $n$. Prázdná množina má 1 podmnožinu: $\emptyset$.

Indukční krok: Označme $n$-tý prvek symbolem $x$. Pak každou podmnožinu $A$ na zbývajících $n-1$ prvcích lze buď ponechat nebo rozšířit na $A \cup x$. Počet možných podmnožin se vždy zdvojnásobí.

Definice: *Charakteristická funkce* podmnožiny $A$ množiny $X$ je zobrazení $\chi_A \colon X \to \{0,1\}$ dané předpisem:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases}$$

Ukázka:
pro $A = \{a, c\} \subseteq \{a, b, c, d\} = X$



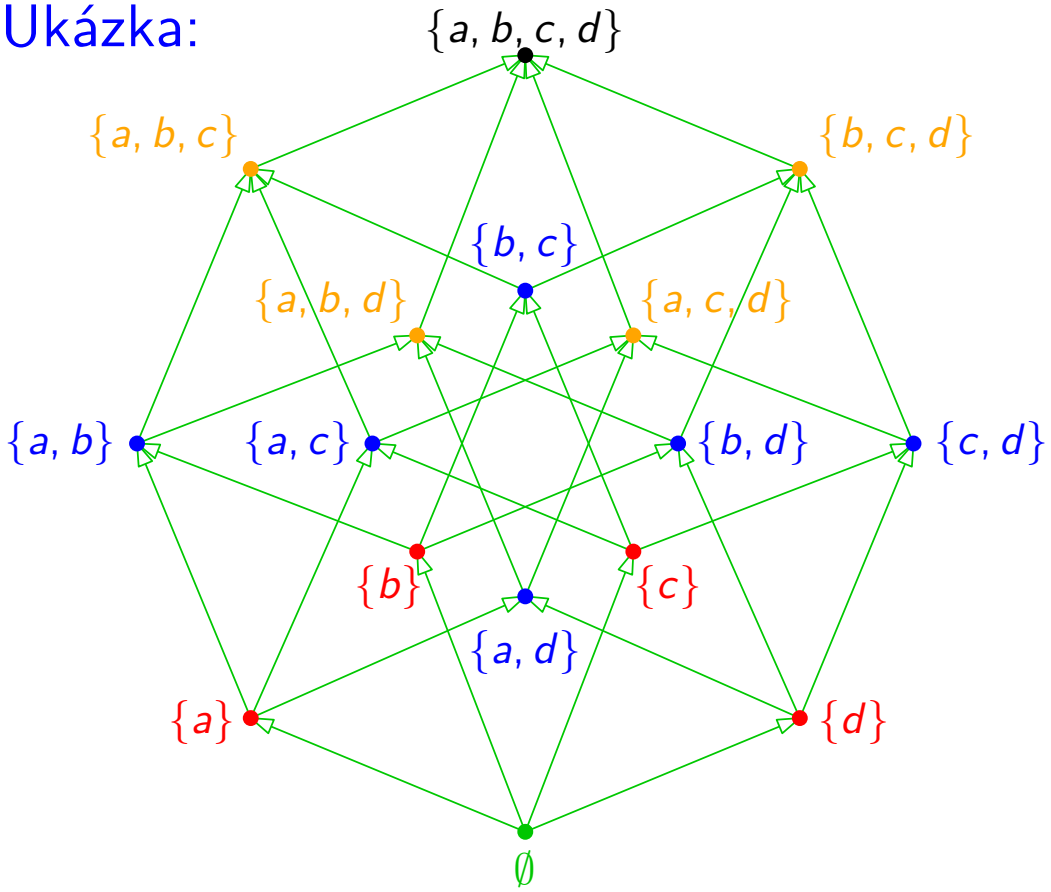

Důkaz 2: Charakteristická funkce $\chi_A$ určuje $A$ a naopak. Máme bijekci mezi $\mathcal{P}(X)$ a množinou charakteristických funkcí na $X$. Počet podmnožin je roven počtu charakteristických funkcí, čili $2^n$.

# Počet podmnožin předepsané velikosti

Věta: Pro každou $n$-prvkovou množinu $X$ a $k \in \{0, \ldots, n\}$ platí, že $X$ má $\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ podmnožin velikosti $k$.

Definice: Číslo $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ je *binomický koeficient* a značí se $\binom{n}{k}$.

Ukázka:




$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = \frac{24}{1 \cdot 24} = 1$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \cdot 6} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{24}{6 \cdot 1} = 4$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = \frac{24}{24 \cdot 1} = 1$$

# Počet podmnožin předepsané velikosti

Věta: Pro každou $n$-prvkovou množinu $X$ a $k \in \{0, \ldots, n\}$ platí, že $X$ má $\frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ podmnožin velikosti $k$.

Důkaz 1: Prvky podmnožiny uspořádáme jakkoli od prvního ke $k$-tému. Dostáváme prosté zobrazení z $\{1, \ldots, k\}$ do $X$. (podmnožina tvoří množinu obrazů zobrazení). Možných zobrazení je $n^{\underline{k}}$ a rozdílné množiny určují různá zobrazení (nikoli naopak).

Např. $\{a, c\}$ dává dvě zobrazení $1 \to a$, $2 \to c$ a $1 \to c$, $2 \to a$.

Podmnožina velikosti $k$ má $k!$ různých uspořádání svých prvků, čili jedné podmnožině odpovídá $k!$ různých prostých zobrazení. Počet podmnožin je roven podílu počtu prostých zobrazení $n^{\underline{k}}$ a počtu uspořádání vybraných prvků $k!$.

Důkaz 2: Indukcí podle $n$: Pro $n = 0$ věta platí.
Indukční krok: Zvolíme jakékoli $x \in X$. Podmnožiny $X$ o $k$ prvcích lze rozdělit na $\binom{n-1}{k-1}$ podmnožin, co obsahují $x$, a na $\binom{n-1}{k}$ bez $x$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(n-1)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(n-1)^{\underline{k-1}}(k+n-k)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \binom{n}{k}$$

Pro úplnost: krajní případy, kdy $k - 1 < 0$ a $k > n - 1$, čili když $k = 0$ nebo $k = n$ je třeba ošetřit zvlášť.

# Vlastnosti binomických koeficientů

*Pascalův trojúhelník* je uspořádání binomických koeficientů znázorňující vztah:

$$\underbrace{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}_{\binom{n}{k}}$$

Pro $k < 0$ a $k > n$ se definuje $\binom{n}{k} = 0$.

$$\begin{array}{c} 1 = \binom{0}{0} \\ 1 = \binom{1}{0}\ 1 = \binom{1}{1} \\ 1 = \binom{2}{0}\ 2 = \binom{2}{1}\ 1 = \binom{2}{2} \\ 1 = \binom{3}{0}\ 3 = \binom{3}{1}\ 3 = \binom{3}{2}\ 1 = \binom{3}{3} \\ 1 = \binom{4}{0}\ 4 = \binom{4}{1}\ 6 = \binom{4}{2}\ 4 = \binom{4}{3}\ 1 = \binom{4}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1 + 1x \\ 1 + 2x + 1x^2 \\ 1 + 3x + 3x^2 + 1x^3 \\ 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4 \end{array}$$

Pozorování:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ... každá množina má jednoznačný doplněk.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ ... odpovídá počtu všech podmnožin.

# Binomická věta

Věta: Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

Důkaz 1: Rozepíšeme $(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)\cdots(1+x)}_{n\times}$.

Člen $x^k$ lze při roznásobení získat tak, že z $k$ dvoučlenů $(1+x)$ zvolíme $x$ a z ostatních $n-k$ dvoučlenů zvolíme 1. Koeficient $\binom{n}{k}$ u $x^k$ je počet možností, kolikrát lze z $n$-prvkové množiny dvoučlenů vybrat $k$-prvkovou podmnožinu, tj. dvoučleny, z nichž volíme $x$.

Důkaz 2: Indukcí podle $n$: Pro $n = 1 : (1+x)^1 = 1x^0 + 1x^1$.
Indukční krok: $(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x)$. Člen $(1+x)^{n-1}$ zapíšeme podle indukčního předpokladu jako $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k$, jehož součin s $(1+x)$ pak algebraicky upravíme na $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k\right)(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right)x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

# Důsledky a zobecnění binomické věty

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ ... dosazením $x = 1$ do binomické věty.
- $(x+y)^n = y^n(\frac{x}{y}+1)^n = y^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{y}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

  ... anebo kombinatoricky stejně jako u binomické věty.

Multinomická věta:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_t \in \{0,1,\ldots,n\} \\ k_1+k_2+\cdots+k_t=n}} \binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_t} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_t^{k_t}$$

kde $\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_t} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_t!}$ je tzv. *multinomický koeficient*.

Ukázka: $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$. Koeficient u $xz$ je dán volbou $k_x = 1, k_y = 0$ a $k_z = 1$ a $\binom{2}{1,0,1} = \frac{2!}{1!0!1!} = 2$.

Multinomický koeficient $\binom{n}{k_1,\ldots,k_t}$ udává počet rozdělení $n$-prvkové množiny na navzájem disjunktní množiny o velikostech $k_1, \ldots, k_t$.
*Disjunktní* znamená „neprotínající se“: $A$ a $B$ jsou disjunktní $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Užití: Počet přesmyček slova MISSISSIPPI: $\binom{11}{1,4,4,2} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = 34\,650$.

Celkem 16 osob lze spárovat $\frac{1}{8!}\binom{16}{2,2,\ldots,2} = \frac{16!}{8!2^8} = 2\,027\,025$ způsoby.

# Počty sudých a lichých podmnožin

Otázka: Kolik má $n$-prvková množina $M$ podmnožin liché velikosti? Je jich více, méně nebo stejně jako podmnožin sudé velikosti?

Označme $L$ množinu lichých podmnožin a $S$ sudých.
Např. pro čtyřprvkovou množinu $\{a, b, c, d\}$ máme:
$L = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$
$S = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$

Hypotéza: Pro neprázdnou $n$-prvkovou je $|L| = |S| = \frac{|M|}{2} = 2^{n-1}$.

Řešení 1: Zvolíme pevně jeden prvek $a \in M$ a rozdělíme všechny podmnožiny na dvě skupiny: ty co neobsahují $a$, a ty ostatní. Mezi těmito dvěma skupinami zavedeme párování: podmnožině $X$ z první skupiny přiřadíme $X \cup a$ z druhé. V každém páru má jedna sudou a druhá lichou velikost, proto je lichých a sudých stejně.
Páry jsou např.: $\emptyset - \{a\}$, $\{b\} - \{a, b\}$, $\ldots$, $\{b, c, d\} - \{a, b, c, d\}$.

Řešení 2: $|S| - |L| = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ sudé}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ liché}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$

$\Rightarrow |S| = |L|$

# Neuspořádané výběry s opakováním a bez opakování

Podobně znějící úlohy: Kolika způsoby lze rozdělit mezi 5 dětí

- 3 třešně, každé může mít nejvýše jednu?
- 7 malin, čili některé jich dostane i víc než jednu?

První úloha odpovídá výběru tříprvkové podmnožiny dětí, tj. těch, které dostanou třešně. To lze provést $\binom{5}{3} = 10$ způsoby. Jiný pohled: počítáme rozklady $3 = a_1 + \cdots + a_5$, kde $a_i \in \{0, 1\}$.

Ve druhé rozkládáme $7 = a_1 + \cdots + a_5$ bez dalších podmínek. Každý rozklad, např. $\boxed{0} + \boxed{4} + \boxed{1} + \boxed{0} + \boxed{2}$ lze zapsat v unární soustavě, čili $\boxed{\phantom{0}} + \boxed{IIII} + \boxed{I} + \boxed{\phantom{0}} + \boxed{II}$. Prázdná pozice na kraji a mezi dvěma sousedními $+$ $+$ odpovídají nulovému sčítanci. Jde o řetězce délky 11 se sedmi symboly $I$ a čtyřmi symboly $+$. Takových posloupností, a tedy i rozdělení malin je $\binom{11}{7} = 330$.

Důsledek: *Neuspořádaných* výběrů $k$ prvků z $n$-prvkové množiny je $\binom{n}{k}$ pro výběry *bez opakování*, a $\binom{n+k-1}{k}$ pro výběry *s opakováním*.

# Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

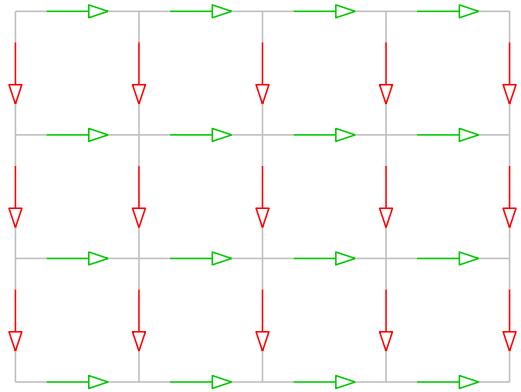
1. Kolik je možností, jak lze obarvit čtyři plaňky plotu šesti barvami? Každá plaňka má být jednobarevná.
   a) 24 b) 360 c) 720 d) $1\,296$ e) $4\,096$ f) $17\,280$
2. A kolik je možností obarvení plotu, pokud navíc chceme, aby plaňky měly různé barvy?
   a) 24 b) 360 c) 720 d) $1\,296$ e) $4\,096$ f) $17\,280$
3. Kolika způsoby lze na šachovnici $8 \times 8$ postavit dvě věže různých barev, aby se navzájem neohrožovaly?
   a) $32 \cdot 49$, b) $\binom{64}{2}$, c) $64 \cdot 49$, d) $2\binom{64}{2}$, e) $56^2$, f) $64 \cdot 63$,
4. Součin charakteristických funkcí $\chi_A \chi_B$ definovaný po složkách vztahem $(\chi_A \chi_B)(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$ je a) nulová funkce, b) $\chi_{A \cup B}$ (tj. ch. funkce sjednocení), c) $\chi_{A \cap B}$ (tj. průniku).
5. Pravda nebo lež? Součet čísel ve třech po sobě jdoucích řádcích Pascalova trojúhelníku je vždy dělitelný sedmi.

# Komentář k řešení kvízu

1. Počet zobrazení z čtyřprvkové množiny planěk do šestiprvkové množiny barev je $6^4 = 1\,296$.
2. Podobně prostých je $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6!}{2!} = 360$.
3. Po postavení bílé na jedno ze 64 políček zbývá černé 49 možností. Algebraickou úpravou dostaneme i e).
4. Hodnotu 1 dostaneme jen v součinu $1 \cdot 1$, čili jen u prvků, které jsou v obou množinách.
5. Sčítáme-li $n$-tý až $(n+2)$-hý řádek, vychází: $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = (1 + 2 + 4) \cdot 2^n = 7 \cdot 2^n$.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jaká je souvislost mezi asociativitou součinu a počtem $k$-tic?
- Jak se mění počet zobrazení vzhledem ke skládání, případně provedením množinových operací na nosných množinách?
- Jak souvisí Pascalův trojúhelník s počtem nejkratších cest mezi dvěma protilehlými body mřížky $m \times n$?



Otázka z úvodu o počtu vyhodnocení databázových dotazů i počtu některých turnajů souvisí s tzv. *Catalanovými čísly*. Ta mj. udávají počet cest ve čtvercové mřížce, které nevstoupí pod diagonálu.

# Poznámky k pojmosloví a značení

Pojem „permutace“ někdy označuje *počet* permutací (coby vzájemně jednoznačných zobrazení). Počtu zobrazení se také říká „variace“, přičemž „variace s opakováním“ berou v potaz všechna zobrazení a „variace bez opakování“ jen prostá. Podobně termín „kombinace bez opakování“ je totéž co binomický koeficient.

Binomický koeficient se často nazývá *kombinační číslo*.

Množina $k$-prvkových podmnožin množiny $X$ se může značit $\binom{X}{k}$.

Výraz $\frac{16!}{8!2^8}$ je také roven součinu všech lichých čísel od $1$ do $15$. Říká se mu *dvojitý faktoriál* a značí se $15!!$. Podobně, dvojitý faktoriál sudého čísla je součin všech sudých čísel v daném rozsahu.

Na $2k$ prvcích je $(2k-1)!!$ párování (lze ukázat i kombinatoricky).