Orientované grafy, stupně vrcholů

Definice: *Orientovaný graf* je $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a $E \subseteq V \times V$ je množina orientovaných hran — šipek. Hrana (u, v) jde z vrcholu u do vrcholu v. Lze mít i smyčky (u, u).

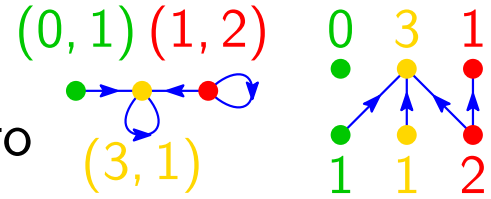
Definice: *Vstupní stupeň* vrcholu v v orientovaném grafu (V, E) je $\deg^{in}(v) = |\{(u, v) \in E\}|$, t.j. počet hran končících ve vrcholu v.

Podobně *výstupní stupeň* vrcholu v je $\deg^{out}(v) = |\{(v, u) \in E\}|$, t.j. počet hran začínajících ve vrcholu v.

Pozorování: Princip sudosti: $\sum_{v \in V} \deg^{in}(v) = \sum_{v \in V} \deg^{out}(v) = |E|$.

... každá hrana má jeden počáteční i jeden koncový vrchol.

Poznámka: Pomocí toků lze v polynomiálním čase rozhodnout, zdali existuje orientovaný graf se stupni $(d_1^{in}, d_1^{out}), \ldots, (d_n^{in}, d_n^{out})$.
Idea: tok $\leftrightarrow$ bipartitní graf $\leftrightarrow$ sloučíme „páry“:



Definice: Orientovaný graf je *vyvážený*, pokud pro každý vrchol $v \in V$ platí: $\deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$.

Silná a slabá souvislost

Definice: Orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u, v existuje orientovaná cesta z u do v, a také z v do u.

Definice: Orientovaný graf je *slabě souvislý*, pokud po odstranění orientací hran vznikne souvislý neorientovaný graf.

Pozorování: Silně souvislý graf je slabě souvislý,
ale opačná implikace neplatí už pro graf s jednou hranou: 

Věta: Pro orientovaný graf jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. graf je vyvážený a slabě souvislý,
2. graf obsahuje uzavřený eulerovský tah,
3. graf je vyvážený a silně souvislý.

. . . 1. $\Rightarrow$ 2. analogicky jako pro neorientované; ostatní už víme.

Důsledek: Pro vyvážené grafy se silná a slabá souvislost shodují!