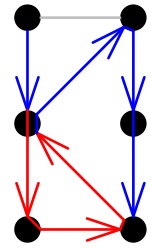
# Stromy a jejich vlastnosti

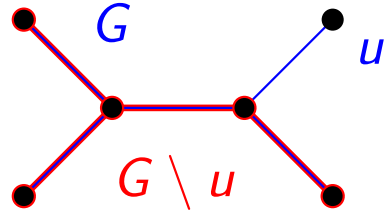
Definice: Strom je souvislý graf bez kružnic.

. . . prázdné grafy bez vrcholů, t.j. $(\emptyset, \emptyset)$ v této lekci neuvažujeme.

Pozorování:
Má-li graf všechny vrcholy stupně alespoň 2, pak obsahuje libovolně dlouhý sled, v němž jsou po sobě jdoucí hrany různé. Je-li $G$ konečný, vrcholy se zopakují. Nejkratší úsek mezi zopakováním vrcholu určuje kružnici.



Obrácené tvrzení dává bezprostředně:
Důsledek: Každý konečný strom na alespoň dvou vrcholech má vrchol stupně 1, zvaný *list*.




Pozorování: Je-li $u \in V_G$ vrchol stupně 1,
pak $G$ je strom, *právě když* $G \setminus u$ je strom.

. . . odebrání či přidání $u$ zachová souvislost ani nevytvoří kružnici.

# Ekvivalentní charakterizace stromů

Věta: Pro každý graf $G$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. $G$ je strom, neboli souvislý a bez kružnic;
2. každé dva vrcholy $G$ spojuje právě jedna cesta;
3. $G$ je souvislý, ale odebráním libovolné hrany se stane nesouvislý;
4. $G$ je bez kružnic, ale přidáním libovolné hrany vznikne kružnice;

Pro konečné grafy je navíc ekvivalentní i podmínka:

5. $G$ je souvislý a splňuje $|E| = |V| - 1$.

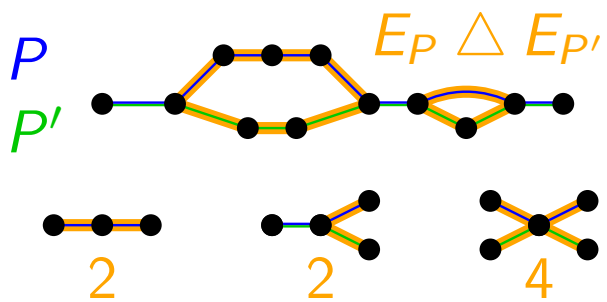
... ukážeme posloupnost implikací $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 1.$
a zvlášť ekvivalenci $1. \Leftrightarrow 5.$

# Ekvivalence podmínek, krok 1. $\Rightarrow$ 2.

1. $G$ je strom, neboli souvislý a bez kružnic;
2. každé dva vrcholy $G$ spojuje právě jedna cesta;

Souvislost $G$ udává, že každé dva vrcholy spojuje *alespoň* 1 cesta.

Jsou-li dva vrcholy spojeny různými konečnými cestami $P$ a $P'$, pak hrany, ve kterých se cesty liší (čili tzv. symetrický rozdíl množin $E_P$ a $E_{P'}$) tvoří konečný podgraf, v němž jsou všechny stupně alespoň 2. Tento podgraf obsahuje kružnici.

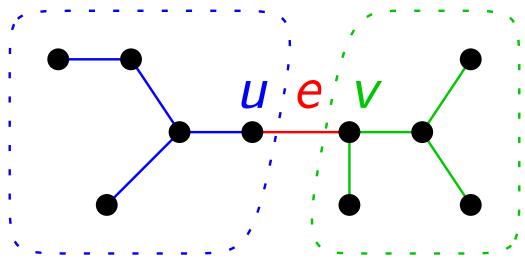


# Ekvivalence podmínek, krok 2. $\Rightarrow$ 3.

2. každé dva vrcholy $G$ spojuje právě jedna cesta;
3. $G$ je souvislý, ale odebráním libovolné hrany se stane nesouvislý;

Existence $\geq 1$ cesty mezi libovolnými vrcholy dává souvislost.

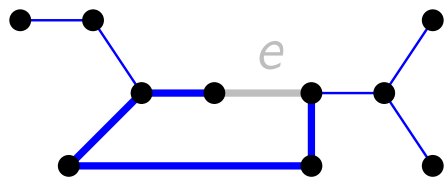
Je-li $e = (u, v) \in E$, tvoří tato hrana $e$ jedinou cestu z $u$ do $v$.
Po jejím odebrání zůstanou $u$ a $v$ v různých komponentách,
protože už je nespojuje žádná jiná cesta.



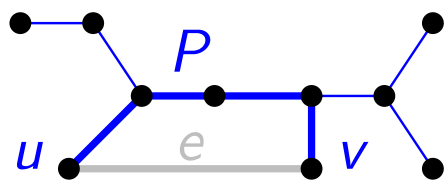
# Ekvivalence podmínek, krok 3. $\Rightarrow$ 4.

3. $G$ je souvislý, ale odebráním libovolné hrany se stane nesouvislý;
4. $G$ je bez kružnic, ale přidáním libovolné hrany vznikne kružnice;

Kdyby $G$ obsahoval kružnici, potom odebráním libovolné hrany $e$ z této kružnice by zůstal souvislý.




V souvislém grafu je mezi každými dvěma vrcholy $u$ a $v$ cesta $P$. Pokud $(u, v) \notin E$, pak přidáním $e$ do $G$ vznikne kružnice $P \cup e$.



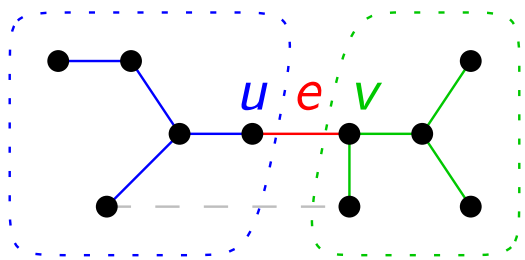
# Ekvivalence podmínek, krok 4. $\Rightarrow$ 1.

4. $G$ je bez kružnic, ale přidáním libovolné hrany vznikne kružnice;
1. $G$ je strom, neboli souvislý a bez kružnic;

Podmínka, že $G$ je bez kružnic, je přímo předpokládána.

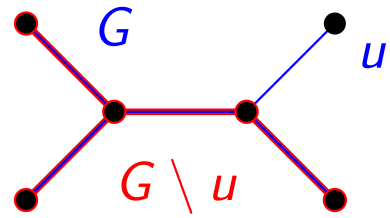
Souvislost $G$ ukážeme pomocí obráceného tvrzení.

Kdyby $G$ nebyl souvislý, zvolíme vrcholy $u$ a $v$ z různých komponent. Přidáním hrany $(u, v)$ nevznikne kružnice, protože kdyby vznikla, byly by $u$ a $v$ ve stejné komponentě.



# Ekvivalence podmínek, krok 1. $\Leftrightarrow$ 5.

1. $G$ je strom, neboli souvislý a bez kružnic;
5. $G$ je souvislý a splňuje $|E_G| = |V_G| - 1$.




Podmínka, že $G$ je souvislý, je na obou stranách.

Důkaz zbývající ekvivalence indukcí podle počtu vrcholů.

I. Strom o jednom vrcholu splňuje: $|E_G| = 0 = 1 - 1 = |V_G| - 1$.

II. Strom $G$ na $\geq 2$ vrcholech má list $u$. Graf $G \setminus u$ je strom s méně vrcholy. Pro něj platí indukční předpoklad: $|E_{G\setminus u}| = |V_{G\setminus u}| - 1$. Protože $|E_{G\setminus u}| = |E_G| - 1$ a $|V_{G\setminus u}| = |V_G| - 1$, plyne dosazením: $|E_G| = |E_{G\setminus u}| + 1 = |V_{G\setminus u}| - 1 + 1 = |V_G| - 1$

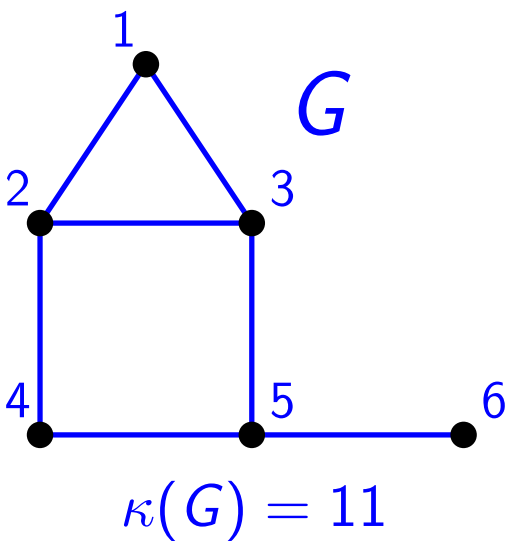
Obráceně, $G$ nemá vrcholy stupně $0$, protože by nebyl souvislý a ani nemůže mít všechny vrcholy stupně alespoň $2$, protože pak by $|E_G| \geq |V_G|$. Tudíž $G$ má vrchol $u$ stupně $1$. Nyní $|E_G| = |V_G| - 1$ $\Rightarrow |E_{G\setminus u}| = |V_{G\setminus u}| - 1 \Rightarrow G \setminus u$ je strom $\Rightarrow G$ je strom.

# Kostra grafu

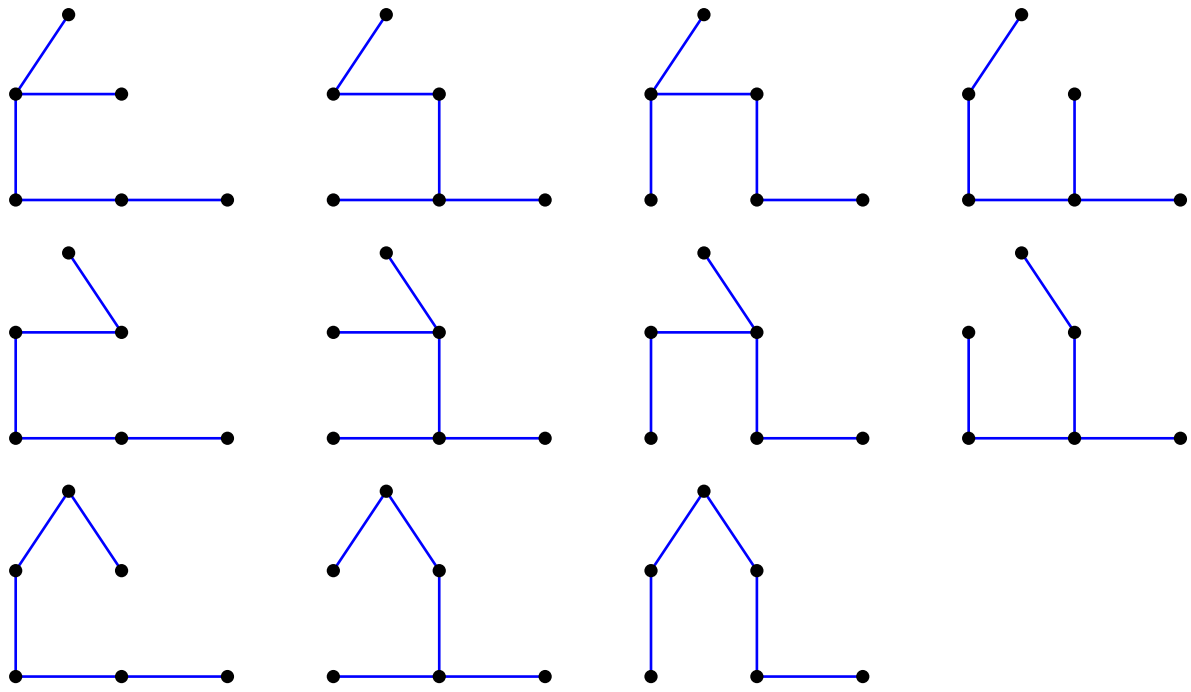
Definice: *Kostra* souvislého grafu $G$ je jeho podgraf, který je stromem (souvislý, bez kružnic) a obsahuje všechny vrcholy $G$.

Počet koster grafu $G$ se značí $\kappa(G)$.

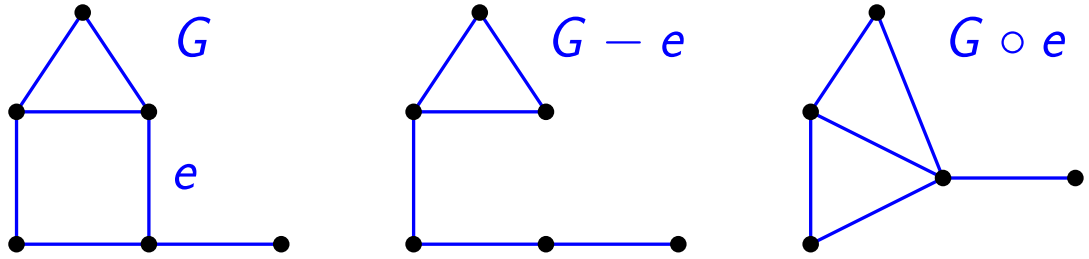
Ukázka:




$\kappa(G) = 11$



# Grafové operace




Značení: Odebráním hrany $e$ z grafu $G$ vznikne graf $G - e$.

Pozorování: Odebráním hrany se graf může stát nesouvislý (odebráním tzv. *mostu*). Nesouvislé grafy nemají žádnou kostru.

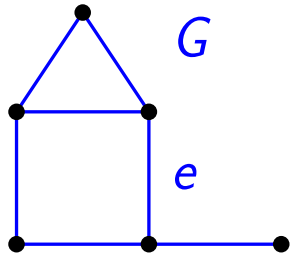
Definice: *Kontrakce* hrany $e = (u, v)$ spočívá v odebrání $e$ a sloučení $u$ a $v$ do jednoho vrcholu. Ostatní hrany zůstávají.

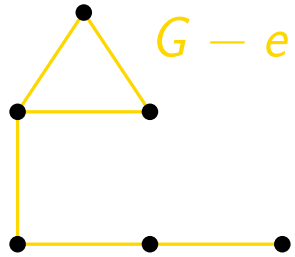
Pozorování: Kontrakcí mohou vzniknout násobné hrany a smyčky.

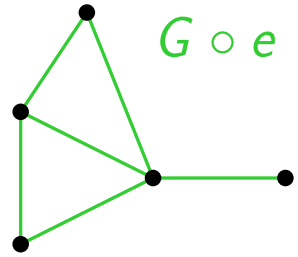
Definice: Zobecnění grafu na strukturu s násobnými hranami a smyčkami se nazývá *multigraf*. Kostry multigrafů splňují:

- Žádná kostra neobsahuje smyčku (jde o cyklus délky 1).
- Různá vlákna násobné hrany odpovídají různým kostrám.

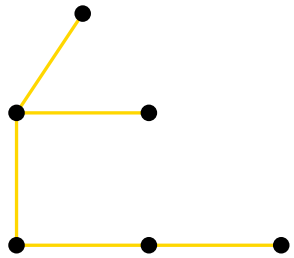
# Rekurence pro hranu (nikoli smyčku)

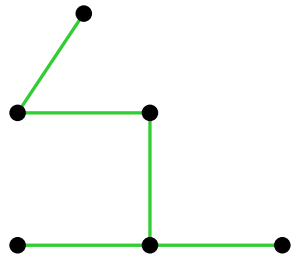


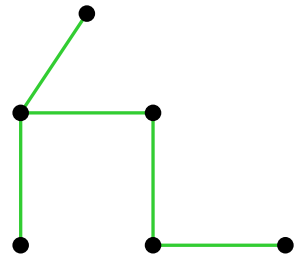



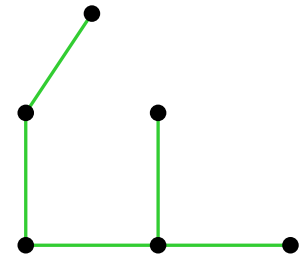



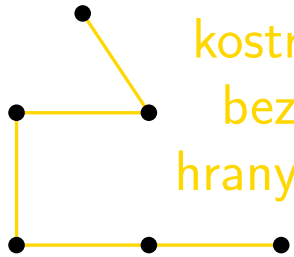

$\kappa(G) = \kappa(G-e) + \kappa(G \circ e)$



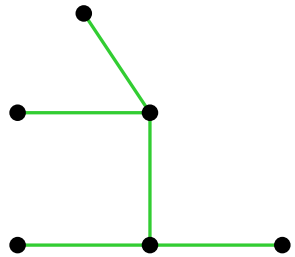


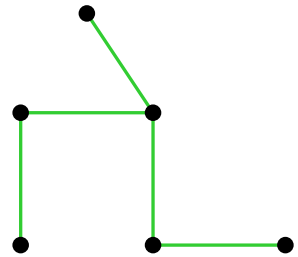


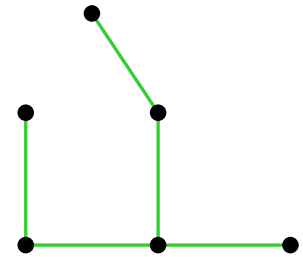


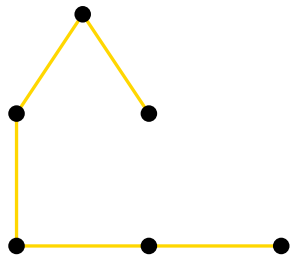


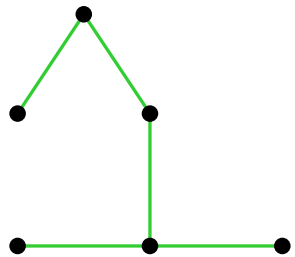
kostry bez hrany $e$

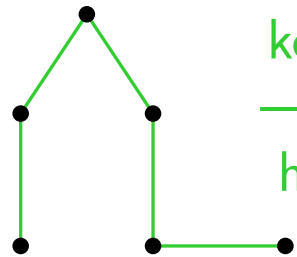






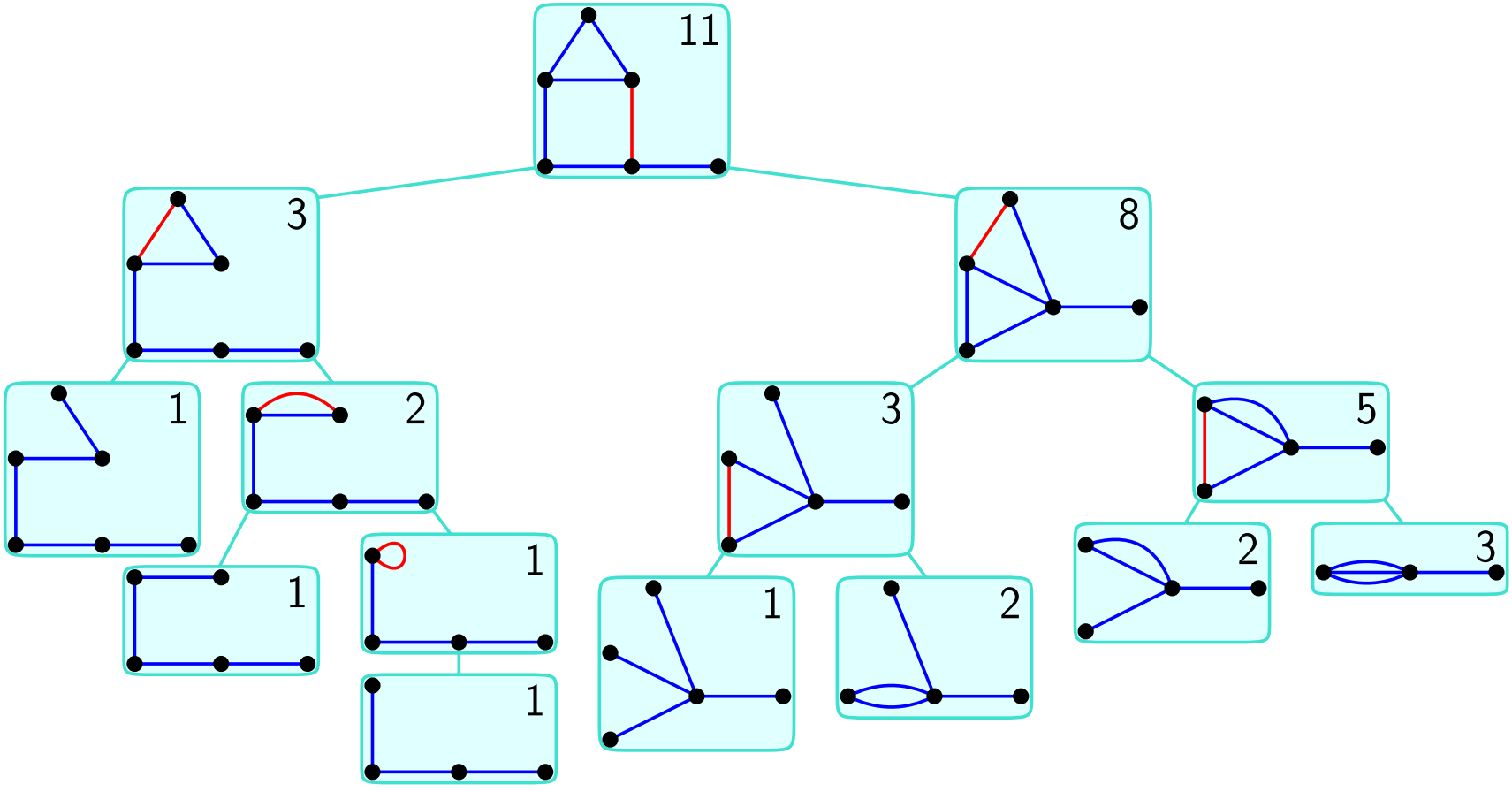






kostry s hranou $e$ — při dekontrakci hranu $e$ přidáme

# Část stromu stromu rekurence




↑ pro smyčku $e$ platí: $\kappa(G) = \kappa(G - e)$

Strom rekurence může být exponenciálně velký vzhledem k velikosti původního grafu.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Je každý strom bipartitní?
- Platí, že každý konečný graf má alespoň dva listy?
- Je požadavek konečnosti nezbytný?
- Co by muselo být splněno, aby listy byly alespoň tři?
- Které další kombinace podmínek z věty o ekvivalentních definicích stromu definují strom a které nikoli?

# Poznámky k pojmosloví a značení

Graf bez kružnic se nazývá *les*. Platí tedy, že souvislý les je strom. Termín strom pochází také od J. J. Sylvestera.

Pro hierarchické struktury se používají stromy s orientovanými hranami, přičemž hrany jsou orientovány směrem ke *kořeni* stromu, (též mohou být všechny orientovány obráceně, t.j. od kořene).

Pro relaci znamenající „$u$ leží na cestě mezi $v$ a kořenem“ se používá termín $u$ je *předek* $v$. Podobně se definují *potomci*; u bezprostředně sousedících vrcholů pak relace *rodič/dítě*; u vrcholů se společným rodičem *sourozenci* apod.