Cesty, tahy, sledy

. . . různé možnosti přechodu mezi dvěma vrcholy.

Definice: *Cesta v grafu* G je jeho podgraf, který je izomorfní cestě.
Jinými slovy, je to posloupnost $v_1, \ldots, v_n$ *různých* vrcholů z G vybraných tak, že $(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ jsou v G hrany.

Pozorování: Cesta má různé vrcholy, proto se její hrany neopakují.

Definice: *Tah* v grafu G je posloupnost $v_1, \ldots, v_n$ vrcholů z G vybraných tak, že $(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ jsou v G *různé* hrany.
. . . v tahu se hrany neopakují, vrcholy se mohou opakovat.

Definice: *Sled* v grafu G je posloupnost $v_1, \ldots, v_n$ vrcholů z G vybraných tak, že $(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ jsou v G hrany.
. . . ve sledu se mohou opakovat vrcholy i hrany.

Pozorování: Každá cesta je zároveň i tahem; každý tah je i sled.
Podobně jako u cest je délka tahu či sledu dána počtem hran.

Souvislé grafy

. . . po hranách lze přejít z libovolného vrcholu do všech ostatních.

Pozorování: Spojuje-li dva vrcholy sled, pak jsou spojené i cestou.

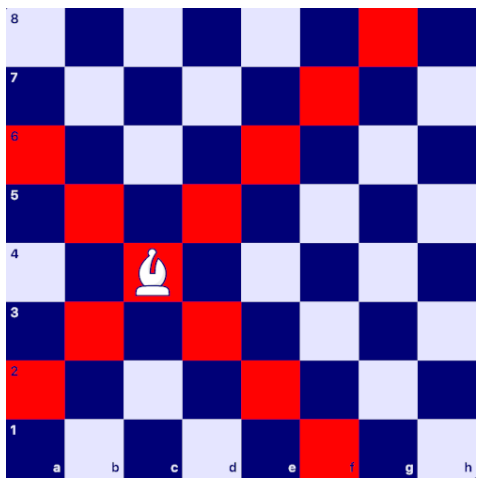
. . . vynechání úseku mezi opakovanými výskyty téhož vrcholu zkrátí sled. Nelze-li už sled takto zkrátit, jde o cestu.

Ukázka: Ve sledu $m, r, a, m, o, r, o, v, a, n, y$ se opakuje např. m. Vynecháním úseku m, r, a, m dostaneme sled m, o, r, o, v, a, n, y. V další iteraci jej zkrátíme na tah m, o, v, a, n, y. Postupů je více, např. vynechání a, m, o, r, o, v, a vede rovnou na tah m, r, a, n, y.

Definice: Graf je *souvislý*, pokud mezi každými jeho dvěma vrcholy vede cesta; v opačném případě je *nesouvislý*.

Ukázka:

Mějme graf G, jehož vrcholy V tvoří pole šachovnice, a hrany odpovídají možným tahům střelce; např. $(\mathrm{c4}, \mathrm{f1}) \in E$. Tento graf tahů střelce je nesouvislý, protože střelec nemůže přejít ze světlého pole na tmavé.



Komponenty souvislosti

. . . odpovídají rozštěpení grafu na oddělené části.

Definice: *Komponenta souvislosti* grafu je jeho podgraf, který je souvislý a zároveň i maximální vzhledem k inkluzi (tj. není vlastním podgrafem jiného souvislého podgrafu).



Ukázky: Graf tahů střelce má dvě komponenty. Jednu tvoří světlá pole a druhou tmavá pole.

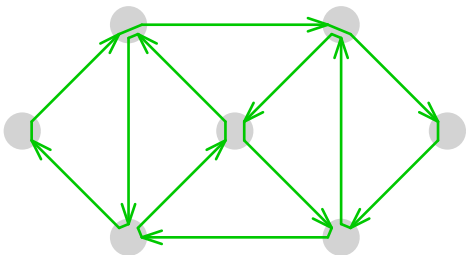
Komponenty grafu na hvězdné mapě jsou souhvězdí, izolované hvězdy, planety a galaxie.

Pozorování: Souvislé grafy mají jen jednu komponentu souvislosti.

Eulerovský tah

Definice: Tah, co začíná i končí ve stejném vrcholu, je *uzavřený*.
Tah, který obsahuje všechny hrany, se nazývá *eulerovský*.

Ukázka:



Pozorování: Má-li graf uzavřený eulerovský tah:

- musí být až na izolované vrcholy souvislý, protože hrany tahu určují souvislý podgraf,
- musí mít všechny stupně sudé, protože každý průchod vrcholem zvýší stupeň o 2,
- je konečný.

Věta:
Konečný graf bez izolovaných vrcholů má uzavřený eulerovský tah, *právě když* je souvislý a zároveň má stupně všech vrcholů sudé.

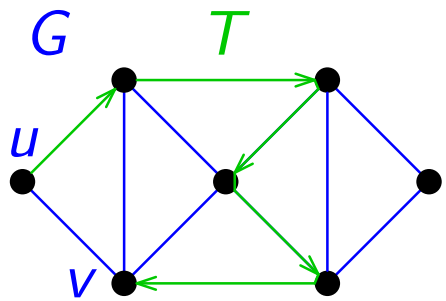
Poznámka: Pokud není třeba, aby měl graf uzavřený eulerovský tah, ale „jen“ eulerovský tah, smí mít dva vrcholy lichého stupně. V jednom z nich eulerovský tah začne a ve druhém skončí.

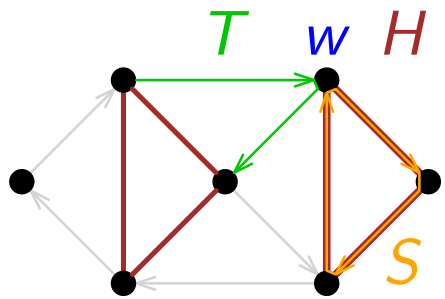
Nalezení uzavřeného eulerovského tahu v grafu G

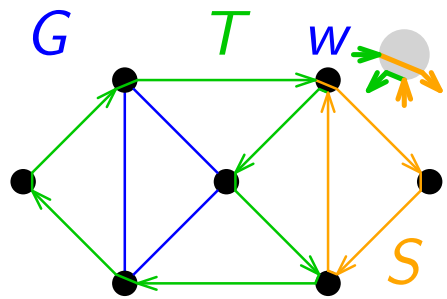
- Z libovolného vrcholu u vedeme co nejdelší tah T.
- Tah prodlužujeme o nové hrany, dokud je to možné, což lze v každém v různém od u. Průchody skrz v nezmění paritu počtu volných hran, ale příchod do v v posledním kroku ji změní ze sudé na lichou, čili ve v zbývá alespoň 1 volná hrana.

... nelze-li tah T prodloužit, končí v u, neboli T je uzavřený.

- Pokud T není eulerovský, určují zbývající hrany neprázdný podgraf H grafu G. Tento podgraf H nemusí být souvislý, ale má sudé stupně. Plyne z parity rozdílu, v T jsou sudé stupně.
- Díky souvislosti G je na T vrchol w s *kladným* stupněm v H.
- Stejným způsobem nalezneme v H uzavřený tah S z w do w.
- Tah T prodloužíme tím, že na místě vrcholu w vložíme tah S.
- Opakujeme tak dlouho, dokud nepoužijeme všechny hrany G.







Důkaz těžší implikace z věty sporem

Pozorování: Každý konečný graf se sudými stupni alespoň 2 obsahuje uzavřený tah začínající v libovolném vrcholu u.

Princip důkazu sporem: Namísto implikace $A \Rightarrow B$ dokážeme ekvivalentní výrok $(A \wedge \neg B) \Rightarrow 0$.

Důkaz $\Leftarrow$: Mějme konečný souvislý graf G se sudými stupni, který neobsahuje eulerovský tah. Díky Pozorování má G alespoň jeden uzavřený tah. Za T zvolíme nejdelší takový tah. Graf G je konečný, proto má jen konečné tahy, a tak je tato volba korektní.

Množina $E_G \setminus E_T$ indukuje neprázdný graf, protože tah T není eulerovský. Zvolme za H libovolnou jeho komponentu. Každý vrchol H náleží nějaké hraně v H, proto má v H stupeň alespoň 1.

H má sudé stupně, neboť jde o rozdíly sudých stupňů v G a v T.

Díky souvislosti G existuje vrchol w ležící zároveň na T i na H.

Podle Pozorování H obsahuje uzavřený tah S začínající ve w.
O tento tah lze prodloužit T. Proto T není nejdelší uzavřený tah v grafu G, což dává spor s volbou T.

Doplňující poznámky

Důkaz pozorování už byl popsán dříve. Formálně jako konstrukce posloupnosti, kterou lze prodloužit v každém vrcholu v různém od u, protože na tahu byl použit lichý počet hran obsahujících v, a tedy alespoň jedna nepoužitá hrana zbývá.

Existence w: Protože G je souvislý, existuje v G cesta z nějakého vrcholu z H do u (které leží na T). Pokud se na této cestě vyskytnou hrany z T i z H, potom lze vybrat dvě po sobě jdoucí hrany na této cestě tak, že jedna patří do E_T a druhá do E_H. Jejich společný vrchol je w. Pokud je celá cesta v T, lze za w vzít její první vrchol a podobně je-li celá v H, lze za w vzít poslední.

Vložení tahu: oba tahy jsou formálně konečné posloupnosti. Tah T rozdělíme v pozici w na dvě podposloupnosti. Z těchto dvou podposloupností a z S sestavíme novou posloupnost pomocí operace zřetězení.

Matice sousednosti

Definice: *Matice sousednosti* grafu G na vrcholech $v_1, \ldots, v_n$ je matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{pokud } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$

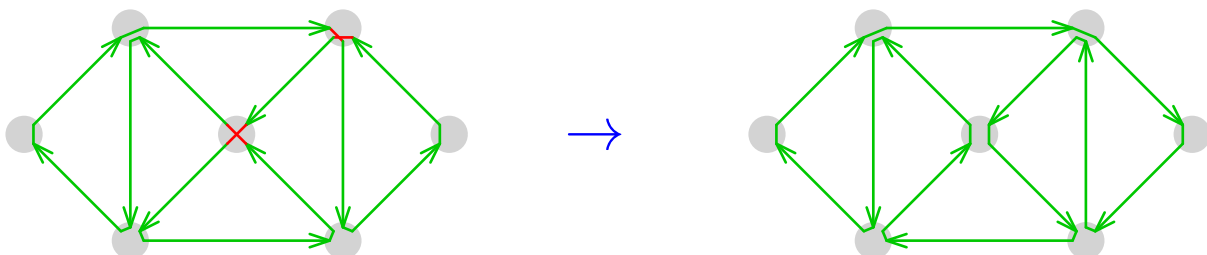
Pozorování: Druhá mocnina matice sousednosti $\boldsymbol{A}^2$ grafu G má na pozici $(\boldsymbol{A}^2)_{ij}$ počet společných sousedů vrcholů v_i a v_j, neboli počet sledů délky 2 z v_i do v_j. Volba $i = j$ dává $(\boldsymbol{A}^2)_{ii} = \deg(v_i)$.

Důkaz: Ve vzorci pro součin $(\boldsymbol{A}^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$ jsou oba činitelé rovny 1, právě když je v_k sousedí s v_i i s v_j; jinak je součin roven 0.

Důsledky: Pro $k \in \mathbb{N}$ má k-tá mocnina matice sousednosti $\boldsymbol{A}^k$ grafu G má na pozici $(\boldsymbol{A}^k)_{ij}$ počet sledů délky k z v_i do v_j.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Má každý souvislý graf cestu, která projde všemi vrcholy?
  Má každý souvislý graf tah, který projde všemi hranami?
  Má každý souvislý graf sled, který projde všemi hranami?
- Kolik nejvíce hran může mít graf na n vrcholech
  s k komponentami souvislosti?
- Jaké vlastnosti musejí mít grafy, které lze nakreslit jedním orientovaným tahem a které mají všechny hrany orientované?
- A co kdyby byly jen některé hrany orientované?
- Pokud lze graf s eulerovským tahem nakreslit bez křížení hran, lze pak nalézt tah takový, že se nekříží ani ve vrcholech?



- Jaké grafové operaci odpovídá součet matic sousednosti?

Poznámky k pojmosloví a značení

Souvislé grafy s eulerovským tahem se nazývají *eulerovské* na počest švýcarského matematika L. Eulera, který v roce 1736 vyřešil problém královéckých mostů.

Jde o jeden z prvních poznatků teorie grafů, jak je s mírnou nadsázkou a velkým respektem zpíváno v její hymně.



Leonhard Euler
1707 – 1783

Pozor na příbuzný, ale odlišný koncept *matice incidence*

$\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{|V|\times|E|}$, dané předpisem: $(\boldsymbol{I})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i \in e_j \\ 0 & \text{pokud } v_i \notin e_j \end{cases}$