

Grafy

Definice: *Graf* se značí $G = (V, E)$, kde V je množina (obvykle neprázdná a konečná) a $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Symbol $\binom{V}{2}$ značí množinu všech dvojic z V .

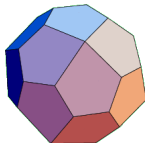
Terminologie vychází z mnohostěnů:

Prvky množiny V se nazývají *vrcholy* a značí se obvykle u, v apod.

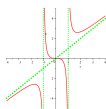
Množina E obsahuje vybrané dvojice vrcholů neboli tzv. *hrany*.

Hrany se značí $e = (u, v)$, ale jde o *neuspořádané* dvojice, čili formálně jsou to dvouprvkové podmnožiny $\{u, v\}$.

Vrcholy tvořící hranu se nazývají *sousední*.



Pozor na podobně nazvané, ale principiálně jiné objekty:



~~Graf funkce~~



~~Statistický či finanční graf~~

Vybrané typy grafů

Prázdný graf je graf bez hran.

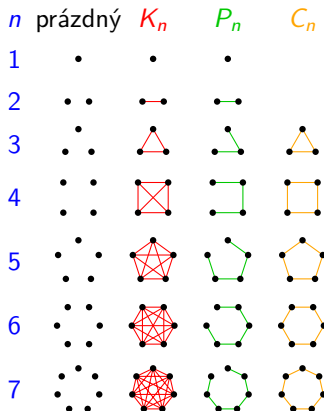
Úplný graf obsahuje všechny možné dvojice na množině vrcholů.

Cesta má seřazené vrcholy a sousedí jen po sobě jdoucí dvojice.

Kružnici neboli *cyklus* získáme z cesty spojením krajních vrcholů.

Formálně, pro $V_n = \{v_1, \dots, v_n\}$:

- ▶ prázdný graf je $(V_n, \emptyset)$,
- ▶ úplný graf je $K_n = (V_n, \binom{V_n}{2})$,
- ▶ cesta P_n má hrany $E_{P_n} = \{(v_i, v_{i+1}) : i \in \{1, \dots, n-1\}\}$,
- ▶ cyklus C_n pro $n \geq 3$ má hrany $E_{C_n} = E_{P_n} \cup \{(v_1, v_n)\}$.



Stupně

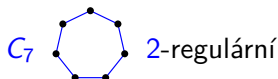
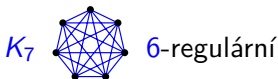
Definice: *Stupeň* vrcholu v je roven počtu hran, kterým v náleží.

Formálně: $\deg(v) = |\{e: v \in e\}|$

Regulární graf má všechny stupně stejné.

Např. každá kružnice je 2-regulární graf a

úplný graf K_n je $(n-1)$ -regulární.

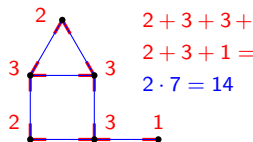


Pozorování (*princip sudosti*): Součet všech stupňů v konečném grafu je roven dvojnásobku počtu hran:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Důkaz:

Každá hrana má dva konce
a každý takový konec je započten
ve stupni jen u jednoho vrcholu.



Důsledek: Konečný graf má sudý počet vrcholů lichého stupně.

Otázka: Stačí stupně $\in \mathbb{Z}$, $\min \geq 0$, $\max \leq n-1$ a sudý součet?

Podgrafy

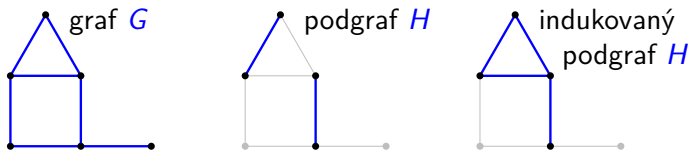
... situace kdy chceme popsat je část vztahů,
čili se zaměříme jen na některé vrcholy a některé hrany.

Definice:

Graf $H = (V_H, E_H)$ je **podgrafem** grafu $G = (V_G, E_G)$,
pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq E_G \cap \binom{V_H}{2}$.

Graf H je navíc podgrafem **indukovaným** množinou V_H ,
pokud u hran platí rovnost namísto inkluze, čili $E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2}$.

Ukázka:



Indukovaný podgraf obsahuje všechny hrany grafu G ,
které mají oba konce ve zvolené množině V_H .

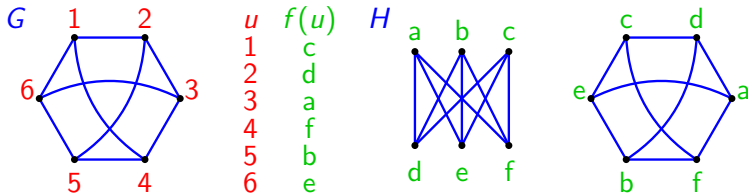
Isomorfismus grafů

... popisuje vztah mezi dvěma grafy,
které se liší jen názvy vrcholů, ale jinak mají stejnou strukturu.

Definice: Graf G je *isomorfní* grafu H pokud existuje
vzájemně jednoznačné zobrazení $f: V_G \rightarrow V_H$ splňující:

$$\forall u, v \in V_G: (u, v) \in E_G \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_H.$$

Ukázky:



Graf K_n má $\binom{n}{5}$ (indukovaných) podgrafů isomorfních K_5 ,
a $n\binom{n-1}{2}$ podgrafů isomorfních P_3 .

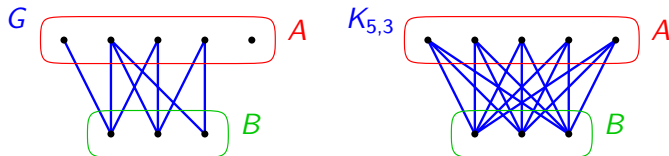
Bipartitní grafy

... grafy, v nichž hrany vedou jen mezi dvěma skupinami vrcholů

Definice: Graf $G = (V, E)$ se nazývá *bipartitní*, jde-li V rozdělit na dvě disjunktní množiny A a B , a každá hrana vede mezi A a B :

$$\exists A, B \subseteq V: V = A \dot{\cup} B \wedge \forall e \in E: (e \cap A \neq \emptyset \wedge e \cap B \neq \emptyset)$$

Ukázka:



Definice:

Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ je takový bipartitní graf, který má všechny hrany mezi množinami A velikosti m a B velikosti n .

Pozorování: Každý bipartitní graf je podgrafem nějakého úplného bipartitního grafu.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Kolik hran má úplný graf K_n a kolik úplný bipartitní $K_{m,n}$?
- ▶ Které cesty a které kružnice jsou izomorfní úplným grafům, resp. úplným bipartitním grafům?
- ▶ Kolik má n -vrcholový graf indukovaných podgrafů?
- ▶ Pomocí jakých zobrazení lze definovat podgrafy a indukované podgrafy?

Poznámky k pojmosloví a značení

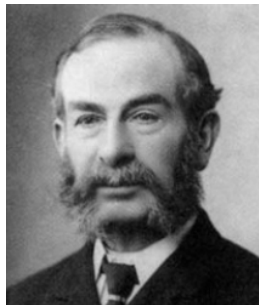
Vrcholy bývají někdy nazývány *uzly*.

Termín graf pochází od J. J. Sylvestera, který jej zavedl v roce 1878 jako synonymum pro Kekulého diagram struktury molekul.

Lze se setkat s definicí grafů, v nichž jsou hrany uspořádané dvojice. Tyto struktury se obvykle nazývají *orientované grafy*.

Zobecnění grafů v nichž jsou povoleny smyčky u vrcholů anebo násobné hrany, případně i půlhrany se nazývají *multigrafy*.

Pro zdůraznění, že graf neobsahuje žádné smyčky, půlhrany ani násobné hrany se používá termín *prostý graf*.



James Joseph
Sylvester
1814 – 1897