

Náhodné veličiny

... popisují, jakou hodnotou může skončit nějaký náhodný pokus

- ▶ počet ok na hozené kostce, případně na více kostkách
- ▶ počet orlů při hodu n mincí,
- ▶ čas doručení balíčku,
- ▶ výše škody při autonehodě,
- ▶ výsledné umístění daného závodníka,
- ▶ počet zmetků vyrobených daný den,
- ▶ počet obslužených zákazníků,
- ▶ nejdelší délka fronty,
- ▶ v informatice maximální zaplnění bufferu,
- ▶ počet pevných bodů náhodné permutace na n prvcích.



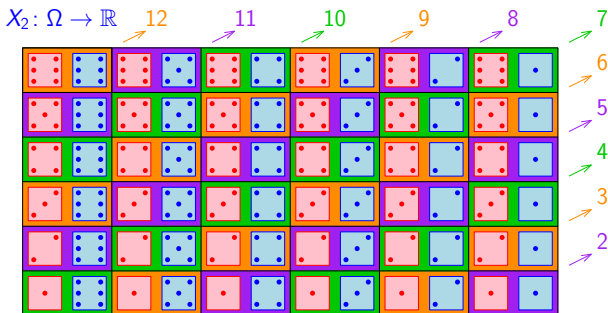
Kromě případů, co mohou v pokusu nastat ... elementární jevy ω ,
treba znát i jejich ohodnocení ... zobrazení $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Náhodná veličina

Definice: *Náhodná veličina* na diskretním pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) je zobrazení $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Značí se X, X_1, Y apod.

Často jde o identitu, např. u X_1 — počtu ok na *jedné* kostce, času doručení balíčku nebo počtu zmetků. Záleží na vybudování Ω .

Ukázka: X_2 — součet ok na dvou různých kostkách:



Všimněte si, že X_2 není prosté zobrazení.

Operace s náhodnými veličinami

V rámci jednoho náhodného pokusu lze zjistit víc veličin najednou. Nové veličiny lze odvodit matematickými operacemi a funkcemi.

Ukázky:

- ▶ Rovnoměrně vybrané náhodné číslo od 0 do 5 lze získat hodem kostkou a odečtením 1, neboli jde o veličinu $X_1 - 1$.
- ▶ Index tělesné hmotnosti je náhodná veličina daná výrazem
$$\text{BMI} = \frac{\text{hmotnost v kg}}{(\text{tělesná výška v m})^2}.$$
- ▶ Hod dvěma kostkami dává nejen celkový počet ok X_2 , ale i počty ok na jednotlivých kostkách. Obě tyto veličiny mají stejné rozdělení jako X_1 , ale jsou definovány na jiném Ω .

Definice: Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a náhodnou veličinu X je její α -násobek náhodná veličina αX na téže Ω daná: $(\alpha X)(\omega) = \alpha X(\omega)$.

Součtem náhodných veličin X a Y na Ω rozumíme náhodnou veličinu $X + Y$ danou: $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Analogicky, **součin** XY je dán předpisem: $(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$.

Střední hodnota náhodné veličiny

... zobecnění průměrného očekávání,
jde o vážený průměr, kde váhy odpovídají pravděpodobnostem.

- ▶ Kolik šestek průměrně padne při hodu 10 kostkami?
- ▶ Jak dlouho se obvykle čeká na tramvaj?
- ▶ Jaký je průměrný plat? I když většina zaměstnanců má podprůměrný plat, má zas nadprůměrně často narozeniny. 😊
- ▶ Jaká je průměrná škoda při havárii auta, přepočteno na všechna auta daného modelu a rok?
- ▶ Jaký je obvyklý počet uživatelů přihlášených na server?
- ▶ Kolik pevných bodů má náhodně zvolená permutace n prvků?



Průměrné očekávání závisí na:

... hodnotách, které náhodná veličina nabývá
... a jejím rozdělení pravděpodobnosti.

Střední hodnota náhodné veličiny

Definice: *Střední hodnota* diskrétní náhodné veličiny X na prostoru (Ω, P) je $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P[\{\omega\}]$. Značí se $E[X]$.

Na nekonečné Ω nemusí součet konvergovat; pak $E[X]$ neexistuje.

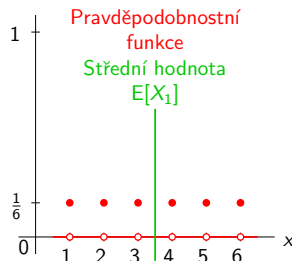
Ukázka: X_1 – hod jednou kostkou

$$E[X_1] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

Pozorování: Sloučení jevů se stejnou hodnotou x náhodné veličiny X dává:

$$E[X] = \sum_x xP[X = x],$$

přičemž stačí sčítat přes obor hodnot X .



Linearita střední hodnoty

Věta: Pro náhodné veličiny X a Y na Ω s konečnými středními hodnotami a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

- ▶ $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ (linearita vůči součtu) a
- ▶ $E[\alpha X] = \alpha E[X]$ (linearita vůči reálnému násobku).

Ukázka: X_2 — hod dvěma kostkami

$$E[X_2] = \sum_{x=2}^{12} xP[X = x] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Y_1 — číslo na první, červené kostce

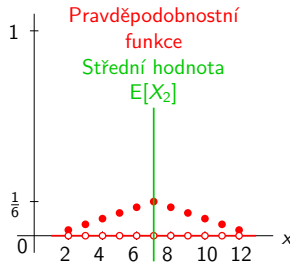
Z_1 — číslo na druhé, modré kostce

... *různé* veličiny na stejném Ω jako X_2 .

Výpočet střední hodnoty podle předpisu $E[X] = \sum_x xP[X = x]$ dá

$$E[Y_1] = E[Z_1] = \frac{7}{2} = E[X_1], \text{ očekávaně.}$$

Platí $X_2 = Y_1 + Z_1$, a proto $E[X_2] = 7 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = E[Y_1] + E[Z_1]$.



Linearita střední hodnoty

Věta: Pro náhodné veličiny X a Y na Ω s konečnými středními hodnotami a libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

- ▶ $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$ (linearita vůči součtu) a
- ▶ $E[\alpha X] = \alpha E[X]$ (linearita vůči reálnému násobku).

Důkaz: Rozepsáním definic: $E[\alpha X] = \sum_{\omega \in \Omega} (\alpha X)(\omega) P[\{\omega\}]$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \alpha X(\omega) P[\{\omega\}] = \alpha \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P[\{\omega\}] = \alpha E[X]$$

$$\begin{aligned} E[X + Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega) P[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) P[\{\omega\}] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P[\{\omega\}] + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) P[\{\omega\}] = E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

Poznámka: Pomocí součinu pravděpodobnostních prostorů lze součet i součin náhodných veličin definovat obecněji i pro náhodné veličiny na *různých* prostorech. Často při opakování pokusu, např. počet orlů při n hodech mincí je součet n veličin jednotlivých hodů. Věta o linearitě střední hodnoty platí i v tomto kontextu.

Indikátor

... pomáhá rozložit složité náhodné veličiny na jednodušší.

Definice: *Indikátor* jevu $A \subseteq \Omega$ je náhodná veličina I_A taková, že

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega \in A, \\ 0 & \text{pro } \omega \notin A. \end{cases}$$

Pozorování: $E[I_A] = \sum_{\omega \in \Omega} I_A(\omega)P[\{\omega\}] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}] = P[A]$.

Ukázka: Kolik průměrně padne šestek při hodu n kostkami?

Označme tuto náhodnou veličinu X . Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ zavedeme jev A_i označující, zda na i -té kostce padla šestka.

Platí $X = I_{A_1} + \dots + I_{A_n}$ a také $E[I_{A_i}] = P[A_i] = \frac{1}{6}$.

Z linearity střední hodnoty dostáváme:

$$\begin{aligned} E[X] &= E[I_{A_1} + \dots + I_{A_n}] \\ &= E[I_{A_1}] + \dots + E[I_{A_n}] \\ &= P[A_1] + \dots + P[A_n] = \frac{n}{6}. \end{aligned}$$



Ukázky indikátorové metody



Hrajeme-li mariáš, kolik srdcových karet lze očekávat v prvních pěti rozdaných kartách?

Označme tuto náhodnou veličinu X a pro i od 1 do 5 zavedeme jevy A_i obsahující ta rozdání, kde i -tá karta je srdcová.

Platí: $X = I_{A_1} + \dots + I_{A_5}$, ale také $E[I_{A_i}] = P[A_i] = \frac{8 \cdot 31!}{32!} = \frac{1}{4}$.

Z linearity dostáváme: $E[X] = E[I_{A_1}] + \dots + E[I_{A_5}] = \frac{5}{4}$.

Při výpočtu střední hodnoty nevadí, že jsou jevy závislé.



Zvolíme-li náhodně substituční šifru, kolik písmen zůstane průměrně nezměněno? Neboli, jaká je střední hodnota veličiny X , znamenající počet pevných bodů náhodné n -prvkové permutace?

Zavedeme jevy A_i obsahující permutace, kde i je pevným bodem. Z $X = I_{A_1} + \dots + I_{A_n}$ a $P[A_i] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ plyne $E[X] = n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Jak se liší náhodná veličina pro součet ok při hodu dvěma *stejnými* kostkami od veličiny X_2 , kde jsou kostky různé?
- ▶ Jak by mohl vypadat pravděpodobnostní prostor pro náhodnou veličinu udávající výši škody při havárii?

Poznámky k pojmosloví a značení

Lze uvažovat i jiné náhodné veličiny než reálné.

Pravděpodobnostní funkce $P[X = x]$ se někdy značí $P(x)$.

Příbuzný pojem ke střední hodnotě je *medián*.

Zjednodušeně řečeno jde o m takové, že $P[X \leq m] \geq \frac{1}{2}$ i $P[X \geq m] \geq \frac{1}{2}$, čili m je „uprostřed“ hodnot nabývaných X .

Střední hodnota se někdy značí μ (angl. *mean*).