

Pravděpodobnostní prostor

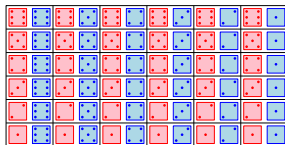
Definice: *Diskrétní pravděpodobnostní prostor* je tvořen spočetnou množinou Ω a zobrazením $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ splňujícím:

$$P[A] = \sum_{\omega \in A} P[\{\omega\}] \text{ a také } P[\Omega] = 1.$$

... všechny podmnožiny Ω jsou jevy.

V *klasickém pravděpodobnostním prostoru*

je Ω konečná a $\forall A \subseteq \Omega: P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$.



Ukázka: Prostor hodů dvěma různými kostkami má 36 elem. jevů, $2^{36} = 68\,719\,476\,736$ jevů, a pravděpodobnost splňuje $P[A] = \frac{|A|}{36}$.

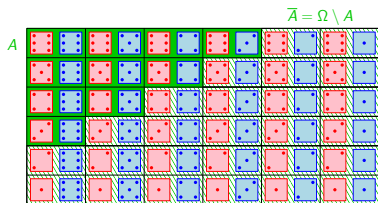
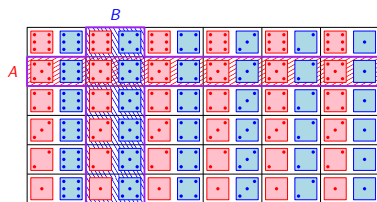
Vlastnosti:

- ▶ $P[\emptyset] = 0$... pravděpodobnost, že nenastane ani jeden z možných případů, je nulová.
- ▶ $P[A] + P[B] = P[A \cup B] + P[A \cap B]$,
speciálně $P[A] + P[B] = P[A \cup B]$, pokud $A \cap B = \emptyset$.
- ▶ $P[\Omega \setminus A] = 1 - P[A]$... jevy A a $\Omega \setminus A$ se navzájem doplňují v Ω i co do pravděpodobnosti.

Ukázky

Jev „v součtu padne nejvýše 8“ je *doplňkový*
k jevu *A*: „v součtu padne alespoň 9“ a značí se $\bar{A}$.

Jeho pravděpodobnost je $P[\bar{A}] = 1 - P[A] = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$



Jev „alespoň na jedné kostce padne 5“ lze vyjádřit sjednocením
jevů *A*: „na červené padne 5“ a *B*: „na modré padne 5“.

Má pravděpodobnost

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

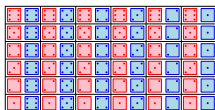
Součin pravděpodobnostních prostorů

Jaké pravděpodobnostní prostory dostáváme při opakování náhodného pokusu, například při opakování hodu kostkou?
Co když provedeme více různých nezávislých náhodných pokusů?
Co má pro pravděpodobnost platit v takových prostorech?

Například: Máme stroj, který má hlavní řídicí systém s poruchovostí 5 % a navíc i nezávislý záložní řídicí systém s poruchovostí 1 %.
Jaké jevy s jakou pravděpodobností mohou u tohoto stroje nastat?

Definice: *Součin* diskrétních pravděpodobnostních prostorů (Ω_1, P_1) a (Ω_2, P_2) je prostor $(\Omega_1 \times \Omega_2, P)$, kde pro každé dva elementární jevy $\omega_1 \in \Omega_1$ a $\omega_2 \in \Omega_2$ platí: $P((\omega_1, \omega_2)) = P_1(\omega_1)P_2(\omega_2)$.

Ukázky: Prostor hodu dvěma kostkami je druhou mocninou prostoru hodu jednou kostkou:



Prostor stavů stroje:

oba 😊	hlavní 😞
94,05 %	4,95 %
záložní 😞	oba 😞😞
0,95 %	0,05 %

Podmíněná pravděpodobnost

... vyjadřuje změnu pravděpodobnosti, pokud se vyskytne nějaká nová informace, která zúží počet možností.

Například, pravděpodobnost, že mezi 12 kartami je srdcová hláška (král a svršek) je $\binom{30}{10} \binom{32}{12}^{-1} = \frac{30! 20! 12!}{20! 10! 32!} = \frac{12 \cdot 11}{32 \cdot 31} = \frac{33}{248} \doteq 13\%$

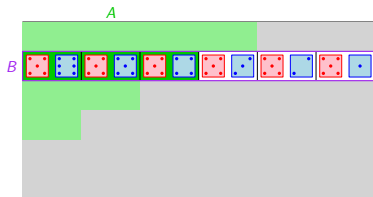
Je-li mezi prvními pěti kartami jen srdcový král, pravděpodobnost se zvýší téměř na dvojnásobek $\binom{26}{6} \binom{27}{7}^{-1} = \frac{26! 20! 7!}{20! 6! 27!} = \frac{7}{27} \doteq 26\%$

Definice: *Podmíněná pravděpodobnost* jevu A za podmínky B , kde $P[B] \neq 0$, je pravděpodobnost $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$.

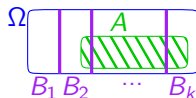
Ukázka:

Pravděpodobnost hodu alespoň 9 (jev A) za podmínky, že na červené kostce je 5 (jev B) je

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{2}.$$



Věta o úplné pravděpodobnosti



Věta: Jsou-li $B_1, \dots, B_k$ disjunktní jevy pokrývající celé Ω , pak pro každý jev A platí:

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + \dots + P[A|B_k]P[B_k]$$

Důkaz: Je A lze pokrýt průniky $A \cap B_1, \dots, A \cap B_k$, přičemž:
 $P[A \cap B_i] = P[A|B_i]P[B_i]$.

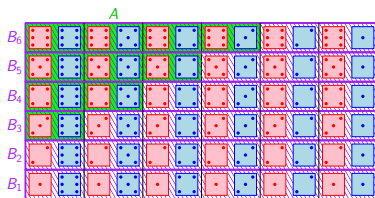
$$\text{Potom: } P[A] = \sum_{i=1}^k P[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^k P[A|B_i]P[B_i]$$

Ukázka:

A ... padlo v součtu alespoň 9

B_i ... na červené padlo i

$$\begin{aligned} P[A] &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \\ &\quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \\ &\quad 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$



Bayesův vzorec

Věta: Jsou-li jevy $B_1, \dots, B_k$ disjunktní a pokrývají-li celé Ω , pak pro každý jev A a každé j platí:

$$P[B_j|A] = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]} = \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{P[A]} = \frac{P[A|B_j]P[B_j]}{\sum_{i=1}^k P[A|B_i]P[B_i]}$$

Použití:

Víme, jak se nějaký test (jev A) chová na ověřených případech (pravděpodobnosti $P[A|B_i]$) a chceme usoudit, který případ (jev B_i) nejspíše nastal, když se test A zdaří (čili $P[B_i|A]$).



Aplikace ve zdravotnictví, testování kvality, umělé inteligenci apod.

Často pro dva doplňkové jevy B_1 a $B_2 = \overline{B_1} = \Omega \setminus B_1$.

Nezávislé jevy

... výsledek jednoho jevu neovlivní pravděpodobnosti ostatních.

Definice: Jevy A a B jsou *nezávislé*, pokud $P[A \cap B] = P[A]P[B]$.

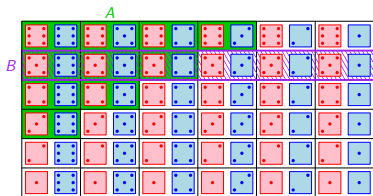
... nezávislé A a B splňují: $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A]P[B]}{P[B]} = P[A]$.

Obecně, $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou nezávislé, když pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ platí: $P\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} P[A_i]$.

Ukázka: Závislé jevy:

A „součet je alespoň 9“ a

B „na první kostce padla 5“.

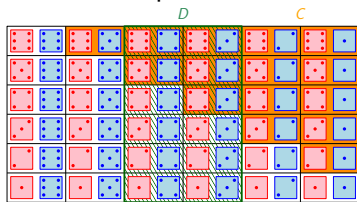


$$P[A \cap B] = \frac{3}{36}$$

$$\neq \frac{5}{108} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{6} = P[A]P[B]$$

Nezávislé jevy: C „na červené padlo víc než na modré“ a

D „na modré padlo 3 nebo 4“.



$$P[C \cap D] = \frac{5}{36}$$

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = P[C]P[D]$$

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Jak souvisejí pravidla pro množinové operace (např. distributivní zákon) s výpočtem pravděpodobností jevů? Kdy jsou třeba dodatečné podmínky?
- ▶ Může mít pravděpodobnostní prostor nekonečnou množinu elementárních jevů a přitom každý elementární jev nenulovou pravděpodobnost? Případně, mohou mít jen některé jevy nenulovou pravděpodobnost?
- ▶ Co by se stalo, kdyby ve větě o úplné pravděpodobnosti nebyly jevy $B_1, \dots, B_k$ disjunktní, ale přesto pokrývaly Ω ?
- ▶ Je nějaká souvislost mezi množinovou inkluzí $A \subseteq B$ a (ne)závislostí těchto jevů?
- ▶ Dostali bychom ekvivalentní definici nezávislosti, pokud bychom podmínku omezili jen na množinu $\{1, \dots, k\}$ a vynechali všechny její vlastní podmnožiny $I \subsetneq \{1, \dots, k\}$?

Poznámky k pojmosloví a značení

Pravděpodobnost lze psát verzálkou p , i s oblými závorkami $p(A)$.

Bývá zvykem označit pomocí $\mathcal{F}$ množinu všech uvažovaných jevů. U diskrétních pravděpodobnostních prostorů je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Jevu Ω s pravděpodobností 1 se říká *jistý*, zatímco jev $\emptyset$ pravděpodobnosti 0 je *nemožný*.

U podmíněné pravděpodobnosti se jevy $B_1, \dots, B_k$, které se navzájem vylučují a vyčerpávají všechny možnosti, nazývají *hypotézy* a pravděpodobnostem $P[B_i]$ se říká *apriorní*.

Pravděpodobnosti, které berou v úvahu, že nastal jev A , čili hledané $P[B_i|A]$, se nazývají *aposteriorní*.