

Princip inkluze a exkluze

... úlohy vedoucí na určení velikosti sjednocení množin pomocí mohutností jejich průniků. Ty může být lehčí spočítat, protože pro průniky platí zároveň vymežující podmínky jednotlivých množin.

- ▶ Kolika způsoby lze rozsadit hosty kolem stolu, aby žádná dvojice manželů neseděla vedle sebe?
- ▶ Kolik je prvočísel menších než 100?

Typickou úlohou je spočítání zobrazení na množinu (surjektivních).

- ▶ Kolika způsoby lze rozmístit úřady s celostátní působností do krajských měst, aby v každém byl aspoň jeden?
- ▶ Kolika způsoby lze naplánovat úlohy na několik počítačů, aby každý měl přiřazenu alespoň jednu?

Pomocí principu inkluze a exkluze v ní počítáme doplněk množiny všech zobrazení, tedy zobrazení, která nejsou na. Pro každý prvek cílové množiny určíme množinu zobrazení, která jej mívají.

Princip inkluze a exkluze

Věta: Mohutnost sjednocení n konečných množin $A_1, \dots, A_n$ je dána vzorcem: $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$

Důkaz indukcí: Nechť pro *libovolných* $n-1$ množin $A'_1, \dots, A'_{n-1}$ platí (IP):

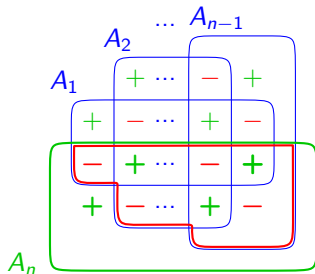
$$|A'_1 \cup \dots \cup A'_{n-1}| = |A'_1| + |A'_2| + \dots + (-1)^n |A'_1 \cap \dots \cap A'_{n-1}|$$

Využijeme distributivitu $\cap$ vůči $\cup$:

$$\begin{aligned} & (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n \\ &= (A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n) \end{aligned}$$

Pak platí: $|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| =$

$$\begin{aligned} &= |A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n| \\ &\stackrel{2 \times \text{IP}}{=} |A_1| + |A_2| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| + |A_n| \\ &\quad - (|A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_n| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n|) \\ &= |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$



Princip inkluze a exkluze — podruhé

Jiný zápis téže věty: Pro $n \in \mathbb{N}$ a konečné $A_1, \dots, A_n$ platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{\{1, \dots, n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Důkaz 2: Libovolný $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ se vlevo započte jedenkrát.

Nechť a patří do j množin z $A_1, \dots, A_n$. Vpravo se započítá:

- ▶ ve všech množinách, jimž náleží: $\binom{j}{1}$ -krát,
- ▶ ve průnicích dvojic těchto j množin: $-\binom{j}{2}$,
- ▶ ve průnicích trojic těchto j množin: $+\binom{j}{3}$,
- ▶ v průniku všech j těchto množin: $(-1)^{j+1} \binom{j}{j}$.

Protože $0 = (1 - 1)^j = \binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \dots + (-1)^j \binom{j}{j}$, vyjde, že a se započte celkem jedenkrát: $\binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \dots + (-1)^{j+1} \binom{j}{j} = \binom{j}{0} = 1$

Další důkaz přes charakteristické funkce: [přednášky M. Mareše].

Počet surjektivních zobrazení

Věta: Mají-li konečné množiny X a Y mohutnosti n a m , potom existuje $\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$ různých zobrazení f z X na Y .

Důkaz: Snáze se spočítají zobrazení, co nejsou na. Pro $j \in Y$ označme A_j množinu těch zobrazení, kde j není v množině obrazů.

Pro libovolnou $I \subseteq Y$ dostaneme $\left| \bigcap_{j \in I} A_j \right| = (m - |I|)^n$, protože průnik obsahuje zobrazení f , kde prvky z I nejsou v obrazu f , neboli jen zobrazení z X do $Y \setminus I$ (tato zobrazení nemusí být na $Y \setminus I$).

Výsledný výraz vznikne dosazením do vzorce pro princip inkluze a exkluze, a sloučením členů s indexovou množinou I velikosti i .

Počet permutací bez pevného bodu

Úloha: Kolik je substitučních šifer, v nichž se žádné písmeno nezobrazí samo na sebe?

Definice: Prvek i je *pevný bod* permutace π , pokud $\pi(i) = i$.

Jinými slovy, máme určit počet permutací bez pevných bodů.

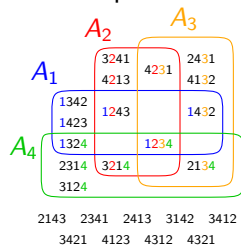
Jednodušší je spočítat permutace
s předepsanými pevnými body.

Pro permutace na n -prvkové množině
označme $A_i = \{\pi : \pi(i) = i\}$
množinu permutací s pevným bodem i .

Platí $|A_i| = (n-1)!$, protože obraz
 i -tého prvku je předepsán a ostatní lze
zpermutovat libovolně.

Podobně, průnik k množin má $(n-k)!$ prvků, protože
 k prvků má obraz předepsán a ostatní lze zpermutovat libovolně.

Ukázka: pro $n = 4$



Počet permutací bez pevného bodu

Podle principu inkluze a exkluze je permutací **bez** pevného bodu:

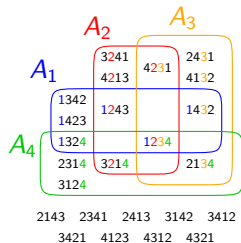
$$n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = n! - (|A_1| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|) \\ = n! - \left(\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \dots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n}(n-n)! \right)$$

Ukázka: pro $n = 4$

$$4! - |A_1 \cup \dots \cup A_4| = \\ = 4! - (|A_1| + \dots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ = 4! - \left(\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}0! \right) \\ = 24 - (4 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 9$$

Dalšími úpravami dostaneme:

$$n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n| = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$



Eulerova funkce

Značení: $\varphi(n)$ znamená počet čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ nesoudělných s n .

Ukázky:

$\varphi(6) = 2$, protože po vyškrtání násobků 2 a 3 zůstanou: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\varphi(12) = 4$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Tvrzení: Necht' $n \in \mathbb{N}$ má rozklad $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$, kde $p_1, p_2, \dots, p_t$ jsou navzájem různá prvočísla.

Potom platí:
$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)$$

Ukázka: $\varphi(1\,000) = 1\,000 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 400$.

Úlohy: ► Dokažte tvrzení.
► Pro která n je $\varphi(n)$ liché?



Leonhard Euler
1707–1783

[Obr. Wikipedie]

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Kolik sčítanců ve vzorci pro princip inkluze a exkluze má kladné znaménko a kolik záporné?
- ▶ Kolik množin násobků je třeba vzít v potaz pro určení počtu prvočísel menších než 100?
- ▶ Proč se součet prvních n členů řady $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ liší od její limity $\frac{1}{e}$ o méně než $\frac{1}{n!}$?

Poznámky k pojmosloví a značení

Název „princip inkluze a exkluze“ vychází z postupu založeného na příliš velkorysém začlenění, po němž následuje kompenzační vyloučení. Koncept je připisován Abrahamu de Moivre (1718), ačkoli poprvé se objevuje až v článku Daniela da Silvy (1854).

Úloha o podílu permutací bez pevného bodu bývá v literatuře nazývána *problém šatnářky* (Hatcheck lady problem).

Postup určení prvočísel vyškrtáním jejich násobků je známé *Eratosthenovo síto*.