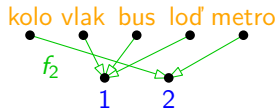


Zobrazení

Definice: *Zobrazení* f z množiny X do množiny Y je množina dvojic (x, y) taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ v této množině. Namísto dvojice (x, y) píšeme $y = f(x)$ a říkáme, že y je *obrazem* x . Zobrazení f z X do Y značíme $f: X \rightarrow Y$.

- ▶ Pro množiny $S = \{\text{kolo, vlak, bus, lod', metro}\}$, $P = \{a, \dots, z\}$ je množina $\{(\text{kolo}, k), (\text{vlak}, v), (\text{bus}, b), (\text{lod'}, l), (\text{metro}, m)\}$ zobrazení $f_1: S \rightarrow P$. Zde f_1 přiřazuje slovu první písmeno.
- ▶ Zobrazení $f_2: S \rightarrow \{1, 2\}$ dané
 $f_2(\text{vlak}) = f_2(\text{bus}) = f_2(\text{lod'}) = 1$
a $f_2(\text{kolo}) = f_2(\text{metro}) = 2$ přiřazuje slovu počet jeho samohlásek.



Zobrazení je zakresleno *grafem* — dvojice odpovídají šipkám.

- ▶ Zobrazení $f_3: P \rightarrow \{97, \dots, 122\}$, které vrátí u malého písmene bez diakritiky jeho ASCII kód v desítkové soustavě.
- ▶ Reálná funkce daná $f_4(x) = x^3 - 4x$ je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.
- ▶ Na každé množině máme *identické zobrazení* $\text{id}: X \rightarrow X$, neboli *identitu*, danou předpisem $\text{id}(x) = x$; lze psát i id_X .

Přiřazení více prvků

Lze zobrazením přiřadit „více prvků naráz“, např. rodiči jeho děti?
Potřebujeme, aby cílová množina obsahovala *množiny prvků*.

Definice: Množinu všech podmnožin množiny X (včetně prázdné) nazveme *potenční množinou* množiny X a značíme ji $\mathcal{P}(X)$.

Ukázka: Pro $X = \{1, 2\}$ máme $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Pokud potřebujeme prvkům z X přiřadit více prvků z Y , použijeme zobrazení $X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ (nikoli „jen“ $X \rightarrow Y$).

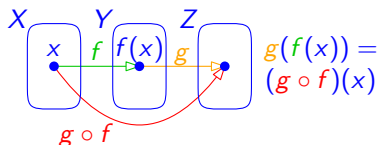
Ukázky: Máme-li na množině slov S přiřadit každému slovu jeho písmena, použijeme zobrazení $f_5: S \rightarrow \mathcal{P}(\{a, \dots, z\})$, např.
 $f_5(\text{kolo}) = \{k, l, o\}$, čili slovu přiřadíme *množinu* jeho písmen.

Podobně zobrazení, které kladnému přirozenému číslu x přiřadí množinu jeho dělitelů, je zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Skládání zobrazení

Značení: Pro zobrazení $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ se **složené zobrazení** značí $g \circ f: X \rightarrow Z$.

Pak platí: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



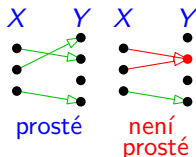
Ukázky: Pro $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = \sin(x)$,
dostáváme: $(g \circ f)(x) = (\sin \circ \exp)(x) = \sin(\exp(x))$,
 $(f \circ g)(x) = (\exp \circ \sin)(x) = \exp(\sin(x))$.

Pro f_1 , které slovu přiřadí první písmeno, a f_3 , které u písmene vrátí jeho ASCII kód, je $f_3 \circ f_1$ zobrazení, které vrácí ASCII kód prvního písmene slova, např. $(f_3 \circ f_1)(\text{kolo}) = f_3(f_1(\text{kolo})) = f_3(k) = 107$.

Obrácené složení $f_1 \circ f_3$ nemá smysl, protože f_1 je definováno na množině slov S , a nikoli na množině ASCII kódů, t.j. čísel.

Prosté zobrazení a zobrazení na

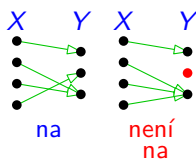
Definice: Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je **prosté**, pokud se obrazy různých prvků liší, formálně $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. V grafu prostého zobrazení do Y vede do každého prvku Y nejvýše jedna šipka.



Ukázky: Zobrazení f_1 je prosté, protože všechna slova v S začínají různými písmeny. Naopak, f_2 prosté není, protože např. slova **vlak** a **lod'** mají stejný počet samohlásek, neboli $f_2(\text{vlak}) = f_2(\text{lod'}) = 1$.

Definice: Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je **na**, pokud je každý prvek Y obrazem alespoň jednoho prvku z X , formálně $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$.

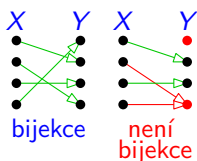
V grafu zobrazení na Y vede do každého prvku Y alespoň jedna šipka.



Ukázky: Zobrazení f_1 není na, např. protože žádné slovo z množiny S nezačíná písmenem **a**. Naopak, f_2 je na, protože v množině S jsou slova s jednou (**lod'**) i se dvěma samohláskami (**kolo**).

Bijekce a permutace

Definice: Zobrazení $f: X \rightarrow Y$, které je zároveň prosté i na, se nazývá *bijekce*, též vzájemně jednoznačné zobrazení. V grafu bijekce mezi X a Y vede do každého prvku Y *právě jedna* šipka.

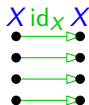


Permutace množiny X je bijekce $X \rightarrow X$.

Ukázky:

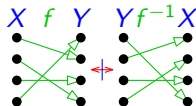
Zobrazení f_3 je bijekce, protože písmena z P mají různé kódy, a každé číslo $\{97, \dots, 122\}$ je kódem písmene z P .

Na každé množině X je identita id_X bijekcí i permutací.



Inverzní zobrazení

Pozorování: Pokud je $f: X \rightarrow Y$ bijekce, potom množina dvojic $\{(y, x): y = f(x)\}$ odpovídá zobrazení, které je také bijekcí.



Definice: Pro bijekci $f: X \rightarrow Y$ definujeme *inverzní zobrazení* k f jako zobrazení $f^{-1}: Y \rightarrow X$, předpisem: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Jinými slovy, f^{-1} pouze obrací pořadí prvků ve dvojicích:

$$f = \{(x, y): y = f(x)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(y, x): y = f(x)\}.$$

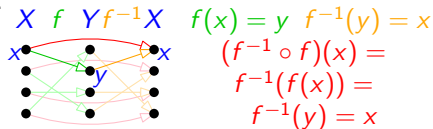
Graf inverzního zobrazení získáme otočením směru šipek.

Ukázka: Inverzní zobrazení k f_3 je zobrazení f_3^{-1} , které ASCII kódu z množiny $\{97, \dots, 122\}$ přiřadí odpovídající písmeno z P .

Pozorování: Pro bijekci $f: X \rightarrow Y$ a každé $x \in X$, $y \in Y$ platí: $f^{-1}(f(x)) = x$ a $f(f^{-1}(y)) = y$.

Stručněji a formálněji:

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X, f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$$

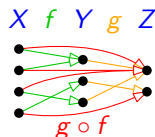
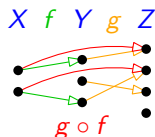


Tvrzení o zobrazeních

Pozorování:

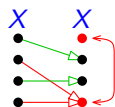
Složení prostých zobrazení je prosté.

Složení zobrazení na je na.



Pozorování:

Pro zobrazení $f: X \rightarrow X$ na *konečné* množině X platí: f je prosté, právě když je na.



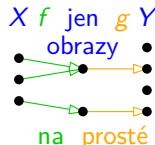
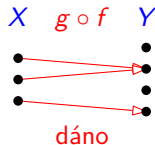
Do X vchází tolik šipek, kolik má X prvků. Buď nastanou obě situace najednou, nebo ani jedna.

Pozor! toto pozorování neplatí pro nekonečné množiny:

Zobrazení $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dané $f(x) = x + 1$ je prosté, ale není na!

Pozorování:

Každé zobrazení lze zapsat jako složení $g \circ f$, kde f je zobrazení na a g je prosté.



Poznámky k pojmosloví a značení

Pojem *funkce* se někdy bere za synonymum pro zobrazení.

Často jsou funkce zobrazení mezi číselnými obory, např. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
a bývají zadány nějakým předpisem, např. $f(x) = x \sin(x)$.

Potenční množina množiny X se někdy značí 2^X .

Pro mohutnost potenční množiny totiž platí: $|\mathcal{P}(X)| = |2^X| = 2^{|X|}$.

Prostá zobrazení se také nazývají *injektivní*,
zobrazení na se nazývají *surjektivní*.