# Náhodné veličiny

. . . popisují, jakou hodnotou může skončit nějaký náhodný pokus

- počet ok na hozené kostce, případně na více kostkách
- počet orlů při hodu $n$ mincí,
- čas doručení balíčku,
- výše škody při autonehodě,
- výsledné umístění daného závodníka,
- počet zmetků vyrobených daný den,
- počet obsloužených zákazníků,
- nejdelší délka fronty,
- v informatice maximální zaplnění bufferu,
- počet pevných bodů náhodné permutace na $n$ prvcích.

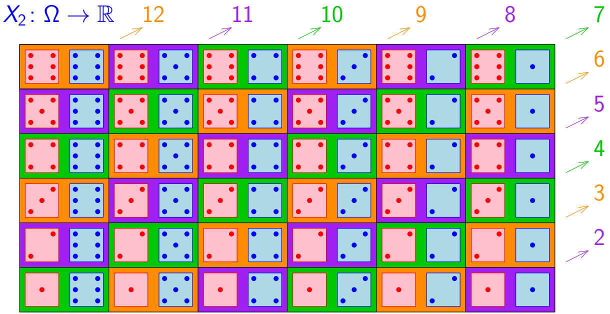

Kromě případů, co mohou v pokusu nastat . . . elementární jevy $\omega$, treba znát i jejich ohodnocení . . . zobrazení $\Omega \to \mathbb{R}$.

# Náhodná veličina

Definice: *Náhodná veličina* na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathrm{P})$ je zobrazení $\Omega \to \mathbb{R}$. Značí se kapitálkami $X, X_1, Y$ apod.

Často jde o identitu, např. u $X_1$ — počtu ok na *jedné* kostce, času doručení balíčku nebo počtu zmetků. Záleží na vybudování $\Omega$.

Ukázka: $X_2$ — součet ok na dvou různých kostkách:



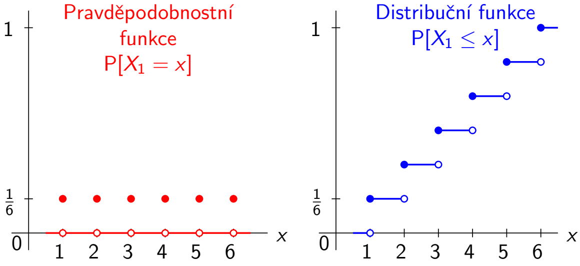

Všimněte si, že $X_2$ není prosté zobrazení.

# Rozdělení pravděpodobnosti

... určuje, jak často náhodná veličina nabývá zvolených hodnot.

V konečných prostorech lze popsat tzv. *pravděpodobnostní funkcí* přímo pravděpodobnost jevu, kdy náhodná veličina nabývá libovolnou konkrétní hodnotu $x$, neboli $\mathrm{P}[\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = x\}]$. Zkráceně se pravděpodobnostní funkce značí $\mathrm{P}[X = x]$.

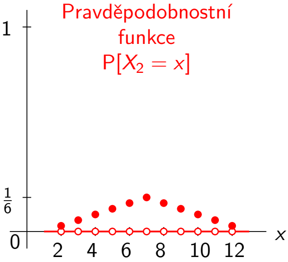
Ukázka: $X_1$ — počet ok při hodu jednou kostkou

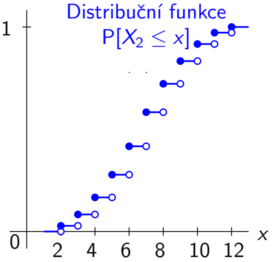



Definice: *Distribuční funkce* náhodné veličiny $X$ je $\mathrm{P}[X \leq x]$.

# Další ukázky

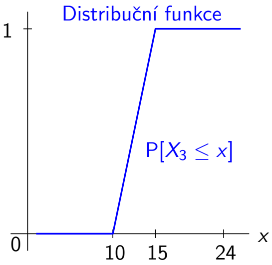
$X_2$ — součet ok při hodu dvěma kostkami




U nekonečných pravděpodobnostních prostorů, jako např. v ukázce o času doručení balíčku, nemusejí pravděpodobnosti $P[X = x]$ nic vypovídat o náhodné veličině $X$, protože mohou být všechny rovny $0$.

$X_3$ — čas doručení mezi 10. a 15. hodinou



## Operace s náhodnými veličinami

V rámci jednoho náhodného pokusu lze zjistit víc veličin najednou. Nové veličiny lze odvodit matematickými operacemi a funkcemi.
Ukázky:

- Rovnoměrně vybrané náhodné číslo od $0$ do $5$ lze získat hodem kostkou a odečtením $1$, neboli jde o veličinu $X_1 - 1$.
- Index tělesné hmotnosti je náhodná veličina daná výrazem $\mathrm{BMI} = \frac{\text{hmotnost v kg}}{(\text{tělesná výška v m})^2}$.
- Hod dvěma kostkami dáva nejen celkový počet ok $X_2$, ale i počty ok na jednotlivých kostkách. Obě tyto veličiny mají stejné rozdělení jako $X_1$, ale jsou definovány na jiném $\Omega$.

Definice: Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a náhodnou veličinu $X$ je její *$\alpha$-násobek* náhodná veličina $\alpha X$ na téže $\Omega$ daná: $(\alpha X)(\omega) = \alpha X(\omega)$.

*Součtem* náhodných veličin $X$ a $Y$ na $\Omega$ rozumíme náhodnou veličinu $X + Y$ danou: $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Analogicky, *součin* $XY$ je dán předpisem: $(XY)(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$.

# Častá diskrétní rozdělení

*Alternativní* rozdělení — provádíme jeden pokus, pravděpodobnost úspěchu je $p$ a neúspěchu $1 - p$.
Formálně: $\mathrm{P}[X = 1] \;=\; p$ a $\mathrm{P}[X = 0] \;=\; 1 - p$.

Ukázky: Hod jednou mincí, přičemž za úspěch se považuje, když padne orel: $\mathrm{P}[X = 1] \;=\; \mathrm{P}[X = 0] \;=\; \frac{1}{2}$.

Výběr náhodné osoby, úspěch, je-li modrooká.

| V Čechách: | ve světě: |
|---|---|
| $\mathrm{P}[X = 1] \;\doteq\; 40\,\%$ | $\mathrm{P}[X = 1] \;\doteq\; 10\,\%$ |
| $\mathrm{P}[X = 0] \;\doteq\; 60\,\%$ | $\mathrm{P}[X = 0] \;\doteq\; 90\,\%$ |

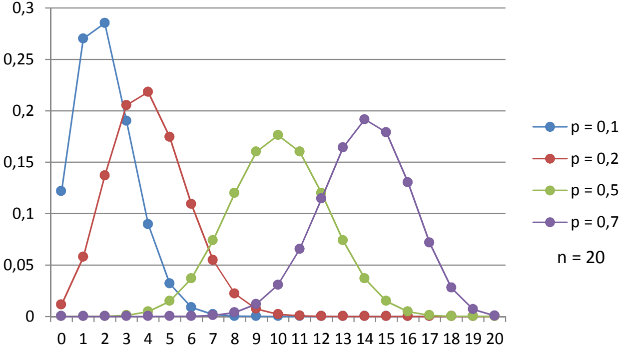
*Rovnoměrné* rozdělení — jeden pokus, každý možný výsledek $x_1, \dots, x_n$ má stejnou pravděpodobnost: $\mathrm{P}[X = x_i] \;=\; \frac{1}{n}$.

Ukázky: Výběr losem jedné z $n$ možností.

Hod jednou kostkou, $\mathrm{P}[X_1 = i] \;=\; \frac{1}{6}$ pro každé $i \in \{1, \dots, 6\}$.

# Častá diskrétní rozdělení

*Binomické* rozdělení — provádíme $n$ pokusů, kdy v každém je pravděpodobnost úspěchu rovna $p$ a počítáme celkový počet úspěchů: $\mathrm{P}[X = k] \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

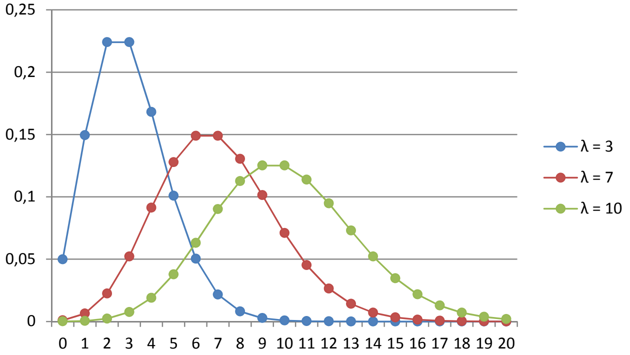



Odpovídá součtu $n$ alternativních rozdělení se stejným $p$.

Ukázka: Pravděpodobnost, že z 10 hodů mincí padne třikrát orel je: $\mathrm{P}[X = 3] \;=\; \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{1024} \doteq 12\,\%$

# Častá diskrétní rozdělení

*Poissonovo* rozdělení — udává počet výskytů událostí, které mají četnost $\lambda$ za jednotkový čas: $\mathrm{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.




Jde o limitu binomických rozdělení takových, že $\lambda = \lim_{n \to \infty} n p_n$.

Ukázka: V síti se průměrně ztratí $5\,000$ paketů za $24$ hodin. Pravděpodobnost, že se jich ztratí $7$ za minutu je:
$\mathrm{P}[X = 7] = \frac{\lambda^7}{7!} e^{-\lambda} \doteq 3,75\,\%$, přičemž $\lambda = \frac{5\,000}{1\,440}$.

# Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik bodů nespojitosti má distribuční funkce náhodné veličiny: „součin počtů ok při hodu dvěma kostkami“?
   a) 6, b) 7, c) 11, d) 12, e) 13, f) 15, g) 18, h) 21, i) 36, j) 49.
2. Pravda nebo lež? Mají-li náhodné veličiny $X$ a $Y$ stejné rozdělení, pak $X + Y = 2X = 2Y$.
3. Jaké rozdělení má náhodná veličina: „počet lichých čísel při hodu kostkou“?
   a) alternativní, b) rovnoměrné, c) binomické, d) Poissonovo.
4. Pravda nebo lež? Distribuční funkce náhodné veličiny na nekonečném pravděpodobnostním prostoru je vždy spojitá.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak se liší náhodná veličina pro součet ok při hodu dvěma *stejnými* kostkami od veličiny $X_2$, kde jsou kostky různé? Liší se jejich rozdělení a distribuční funkce?
- Jak by mohl vypadat pravděpodobnostní prostor pro náhodnou veličinu udávající výši škody při havárii?
- Jak spolu souvisí pravděpodobnostní prostory binomického a alternativního rozdělení? Jak je míněn součet těchto veličin?
- Jak by měl vypadat pravděpodobnostní prostor pro náhodnou veličinu, která by byla součtem dvou náhodných veličin vzešlých ze dvou odlišně provedených náhodných pokusů? (Každá z veličin by měla jiný pravděpodobnostní prostor.)
- Jak by bylo vhodné navrhnout rozdělení spojité veličiny pomocí její distribuční funkce? Nápovědou jsou spojitá zobecnění součtu a rozdílu.

# Poznámky k pojmosloví a značení

Lze uvažovat i jiné náhodné veličiny než reálné.

Pravděpodobnostní funkce $\mathrm{P}[X = x]$ se někdy značí $P(x)$.

Alternativní rozdělení se též nazývá Bernoulliho.