Podmíněná pravděpodobnost

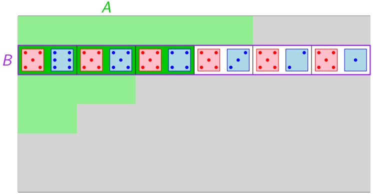
... vyjadřuje změnu pravděpodobnosti, pokud se vyskytne nějaká nová informace, která zúží počet možností.

Například, pravděpodobnost, že mezi 12 kartami je srdcová hláška (král a svršek) je $\binom{30}{10}\binom{32}{12}^{-1} = \frac{30!\,20!\,12!}{20!\,10!\,32!} = \frac{12\cdot 11}{32\cdot 31} = \frac{33}{248} \doteq 13\%$

Pokud je mezi prvními pěti kartami srdcový král, pravděpodobnost se zvýší téměř na dvojnásobek $\binom{26}{6}\binom{27}{7}^{-1} = \frac{26!\,20!\,7!}{20!\,6!\,27!} = \frac{7}{27} \doteq 26\%$

Definice: *Podmíněná pravděpodobnost* jevu A za podmínky B, kde $\mathrm{P}[B] \neq 0$, je pravděpodobnost $\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A\cap B]}{\mathrm{P}[B]}$.

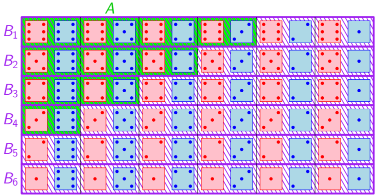
Ukázka:
Pravděpodobnost hodu alespoň 9 (jev A) za podmínky, že na červené kostce je 5 (jev B) je
$\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A\cap B]}{\mathrm{P}[B]} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{2}$.



Bayesův vzorec

Věta o úplné pravděpodobnosti:
Jsou-li $B_1, \dots, B_k$ disjunktní jevy pokrývající celé Ω, pak platí
$\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[A|B_1]\mathrm{P}[B_1] + \mathrm{P}[A|B_2]\mathrm{P}[B_2] + \dots + \mathrm{P}[A|B_k]\mathrm{P}[B_k]$

… jev A lze pokrýt průniky $A \cap B_1, \dots, A \cap B_k$, přičemž $\mathrm{P}[A \cap B_i] = \mathrm{P}[A|B_i]\mathrm{P}[B_i]$, i $\mathrm{P}[A \cap B_j] = \mathrm{P}[B_j|A]\mathrm{P}[A]$



Ukázka:
$\mathrm{P}[A] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$

Důsledek (Bayesův vzorec): Za stejných podmínek platí i

$$\mathrm{P}[B_j|A] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B_j]}{\mathrm{P}[A]} = \frac{\mathrm{P}[A|B_j]\mathrm{P}[B_j]}{\mathrm{P}[A]} = \frac{\mathrm{P}[A|B_j]\mathrm{P}[B_j]}{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}[A|B_i]\mathrm{P}[B_i]}$$

Použití Bayesova vzorce

... víme, jak se nějaký test (jev A) chová na ověřených případech (pravděpodobnosti $\mathrm{P}[A|B_i]$) a chceme usoudit, který případ (jev B_i) nejspíše nastal, když se test A zdaří (čili $\mathrm{P}[B_i|A]$).

Aplikace ve zdravotnictví, testování kvality, umělé inteligenci apod.

Ukázka: Zkoumaná choroba postihuje 0,5 % populace (*prevalence*). Její test ukáže pozitivní výsledky u 99,9 % nemocných pacientů (*senzitivita*), a negativní u 99 % zdravých (*specificita*).*

S jakou pravděpodobností je pacient nemocný, má-li test pozitivní?
S jakou pravděpodobností je pacient zdravý, má-li test negativní?

Jevy: A — pacienti s pozitivním testem, B — nemocní pacienti,

$$\mathrm{P}[A] = \mathrm{P}[A|B]\mathrm{P}[B] + \mathrm{P}[A|\overline{B}]\mathrm{P}[\overline{B}]$$
$$= 0{,}014\,945$$

$$\mathrm{P}[B|A] = \frac{\mathrm{P}[A|B]\mathrm{P}[B]}{\mathrm{P}[A]} \doteq 0{,}334\,225$$

$$\mathrm{P}[\overline{B}|\overline{A}] = \frac{\mathrm{P}[\overline{A}|\overline{B}]\mathrm{P}[\overline{B}]}{\mathrm{P}[\overline{A}]} \doteq 0{,}999\,995$$

B_i	$\mathrm{P}[B_i]$	$\mathrm{P}[A\|B_i]$	$\mathrm{P}[\overline{A}\|B_i]$
B	0,005	0,999	0,001
$\overline{B}$	0,995	0,01	0,99

* Štěpán, Zvára: Pravděpodobnost a matematická statistika, Příklad 2.7

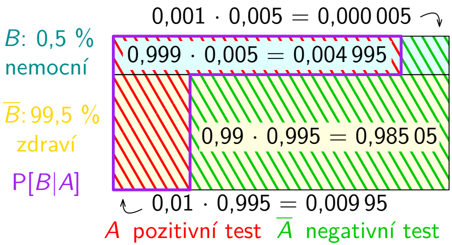
Použití Bayesova vzorce

… víme, jak se nějaký test (jev A) chová na ověřených případech (pravděpodobnosti $\mathrm{P}[A|B_i]$) a chceme usoudit, který případ (jev B_i) nejspíše nastal, když se test A zdaří (čili $\mathrm{P}[B_i|A]$).

Aplikace ve zdravotnictví, testování kvality, umělé inteligenci apod.

Ukázka: Zkoumaná choroba postihuje $0{,}5\,\%$ populace (*prevalence*). Její test ukáže pozitivní výsledky u $99{,}9\,\%$ nemocných pacientů (*senzitivita*), a negativní u $99\,\%$ zdravých (*specificita*).*

S jakou pravděpodobností je pacient nemocný, má-li test pozitivní?
S jakou pravděpodobností je pacient zdravý, má-li test negativní?



Pozitivní výsledek testu jen málo odpovídá správné diagnóze $\mathrm{P}[B|A] \doteq 33\,\%$ protože jevy $A \cap B$ a $A \cap \overline{B}$ jsou podobně pravděpodobné. Ovšem pro vyvrácení diagnózy je test dostatečně spolehlivý.

* Štěpán, Zvára: Pravděpodobnost a matematická statistika, Příklad 2.7

Použití Bayesova vzorce

... pro případ více než jen dvou navzájem doplňkových jevů B a $\overline{B}$

Ukázka: Říká se: „Večerní červánky věští pěkný den.“ Dejme tomu, že polovina dní je slunečných a červánky jim předcházejí v $10\,\%$. Dvě pětiny jsou zatažené, jim předcházejí červánky v $5\,\%$ případů. Zbylé dny jsou deštivé, a po červáncích nastanou jen v $1\,\%$.
Do jaké míry by šlo pranostice věřit? (Data nejsou skutečná.*)
Jevy: A — červánky, B_1, B_2, B_3 — slunečno, zataženo, deštivo.
Pravděpodobnosti: $\mathrm{P}[A] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{71}{1\,000}$

	$\mathrm{P}[B_i]$	$\mathrm{P}[A \mid B_i]$	$\mathrm{P}[B_i \mid A]$
B_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1\,000}{71} = \frac{50}{71} \doteq 75\,\%$
B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1\,000}{71} = \frac{20}{71} \doteq 24\,\%$
B_3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1\,000}{71} = \frac{1}{71} \doteq 1\,\%$

Odpověď: Asi ve $\frac{3}{4}$ případů by po červáncích mělo být slunečno.

* Červánky coby subjektivní úkaz nepatří mezi sledované meteorologické jevy.

Nezávislé jevy

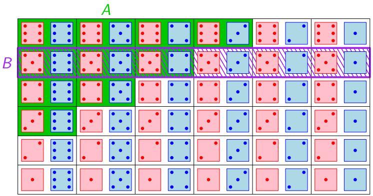
... výsledek jednoho jevu neovlivní pravděpodobnosti ostatních.

Definice: Jevy A a B jsou *nezávislé*, pokud $\mathrm{P}[A \cap B] = \mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]$.

... nezávislé A a B splňují: $\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B]}{\mathrm{P}[B]} = \frac{\mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]}{\mathrm{P}[B]} = \mathrm{P}[A]$.

Obecně, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou nezávislé, když pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ platí: $\mathrm{P}\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} \mathrm{P}[A_i]$.

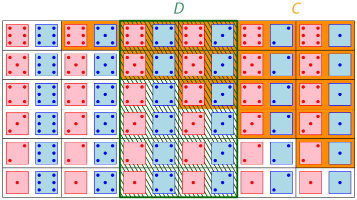
Ukázka: Závislé jevy: A „součet je alespoň 9“ a B „na první kostce padla 5“.



$\mathrm{P}[A \cap B] = \frac{3}{36}$

$\neq \frac{5}{108} = \frac{5}{18} \cdot \frac{1}{6} = \mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]$

Nezávislé jevy: C „na červené padlo víc než na modré“ a D „na modré padlo 3 nebo 4“.



$\mathrm{P}[C \cap D] = \frac{5}{36}$

$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[D]$

Nezávislé jevy

... výsledek jednoho jevu neovlivní pravděpodobnosti ostatních.

Definice: Jevy A a B jsou *nezávislé*, pokud $\mathrm{P}[A \cap B] = \mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]$.

... nezávislé A a B splňují: $\mathrm{P}[A|B] = \frac{\mathrm{P}[A \cap B]}{\mathrm{P}[B]} = \frac{\mathrm{P}[A]\mathrm{P}[B]}{\mathrm{P}[B]} = \mathrm{P}[A]$.

Obecně, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou nezávislé, když pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ platí: $\mathrm{P}\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} \mathrm{P}[A_i]$.

Ukázka: Jev E „na červené padlo 3 nebo 4" je nezávislý na C i na D.

$\mathrm{P}[C \cap E] = \frac{5}{36} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[E]$

$\mathrm{P}[D \cap E] = \frac{1}{9} = \mathrm{P}[D]\mathrm{P}[E]$

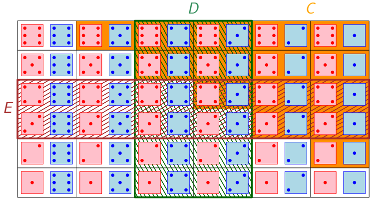
Pozor! Nezávislost dvojic *nezaručuje* nezávislost všech.

Všechny tři nezávislé nejsou:

$\mathrm{P}[C \cap D \cap E] = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{108}$

$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[D]\mathrm{P}[E]$

Nezávislé jevy: C „na červené padlo víc než na modré" a D „na modré padlo 3 nebo 4".



$\mathrm{P}[C \cap D] = \frac{5}{36}$

$= \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \mathrm{P}[C]\mathrm{P}[D]$

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravděpodobnost, že při třech hodech spravedlivou mincí padla alespoň dvakrát panna, za podmínky, že v prvních dvou hodech padl nejvýše jeden orel, je:
   a) 0, b) $\frac{1}{6}$, c) $\frac{1}{4}$, d) $\frac{3}{8}$, e) $\frac{1}{3}$, f) $\frac{1}{2}$, g) $\frac{2}{3}$, h) $\frac{5}{8}$, i) $\frac{3}{4}$, j) $\frac{5}{6}$, k) 1.
2. Pokud $P[A|B] = P[B|A]$, potom platí také: a) $P[A] = 1$, b) $P[A] = P[B]$, c) $P[B] = 1$, d) ani jedno z uvedených.
3. Pravda nebo lež? Pokud je průnik jevů A, B a C prázdný, ale každá dvojice má neprázdný průnik, pak $P[A|B \cap C]$ je nulová.
4. Pravda nebo lež?
   Hodíme-li pětkrát mincí, pak jevy „padl lichý počet orlů" a „v obou prvních dvou hodech padla panna" jsou nezávislé.
5. Jsou-li jevy A a B závislé, pak platí
   a) $P[A] > P[A|B]$, b) $P[A] \neq P[A|B]$, c) $P[A] < P[A|B]$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Co by se stalo, kdyby ve větě o úplné pravděpodobnosti nebyly jevy $B_1, \ldots, B_k$ disjunktní, ale přesto pokrývaly Ω?
- Je nějaká souvislost mezi množinovou inkluzí $A \subseteq B$ a (ne)závislostí těchto jevů?
- Dostali bychom ekvivalentní definici nezávislosti, pokud bychom podmínku omezili jen na množinu $\{1, \ldots, k\}$ a vynechali všechny její vlastní podmnožiny $I \subsetneq \{1, \ldots, k\}$?

Poznámky k pojmosloví a značení

U podmíněné pravděpodobnosti se jevy $B_1, \ldots, B_k$,
které se navzájem vylučují a vyčerpávají všechny možnosti,
nazývají *hypotézy* a pravděpodobnostem $\mathrm{P}[B_i]$ se říká *apriorní*.

Pravděpodobnosti, které berou v úvahu, že nastal jev A,
čili hledané $\mathrm{P}[B_i|A]$, se nazývaji *aposteriorní*.