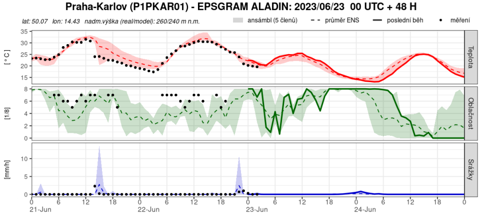
Pravděpodobnost

... modeluje, jak často může nastat nějaká událost, např. zdali

- při hodu mincí padne panna nebo orel,
- při hraní mariáše dostaneme srdcovou hlášku,
- spíše přijede dřív tramvaj č. 12 než 22,
- zítra zaprší,
- během roku nabouráme auto,
- se web server nezhroutí pod náporem dotazů,
- náhodně vybrané číslo s 1 000 ciframi je prvočíslo.



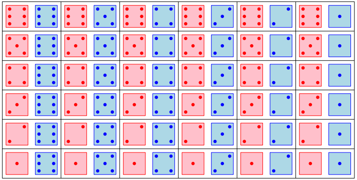
Jevy a pravděpodobnost

... co je třeba pro popis pravděpodobnosti znát?

- množinu Ω všech možných jednotlivých vzájemně odlišných případů, které mohou nastat, těm se říká *elementární jevy*,
- u kterých podmnožin $A \subseteq \Omega$, tzv. *jevů*, má smysl uvažovat pravděpodobnost P,
- což je zobrazení přiřazující A číslo $\mathrm{P}[A]$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

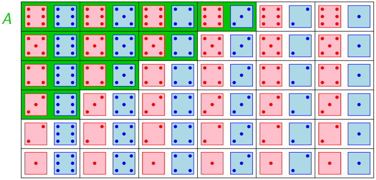
Ukázky:

Hod dvěma různými kostkami



Elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{36}$.

Jev A „součet je alespoň 9“



má pravděpodobnost $\mathrm{P}[A] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

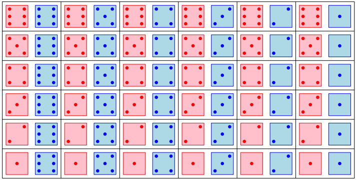
Jevy a pravděpodobnost

... co je třeba pro popis pravděpodobnosti znát?

- množinu Ω všech možných jednotlivých vzájemně odlišných případů, které mohou nastat, těm se říká *elementární jevy*,
- u kterých podmnožin $A \subseteq \Omega$, tzv. *jevů*, má smysl uvažovat pravděpodobnost P,
- což je zobrazení přiřazující A číslo $\mathrm{P}[A]$ z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

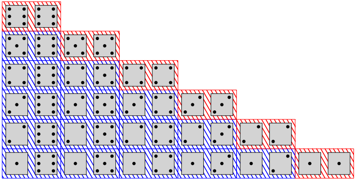
Ukázky:

Hod dvěma různými kostkami



Elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost $\frac{1}{36}$.

Hod dvěma stejnými kostkami



Pravděpodobnosti elem. jevů se mohou lišit: $\mathrm{P}_1 = \frac{1}{36}$, $\mathrm{P}_2 = \frac{2}{36}$.

Jevy a pravděpodobnost

. . . co je třeba pro popis pravděpodobnosti znát?

- množinu Ω všech možných jednotlivých vzájemně odlišných případů, které mohou nastat, těm se říká *elementární jevy*,
- u kterých podmnožin $A \subseteq \Omega$, tzv. *jevů*, má smysl uvažovat pravděpodobnost P,
- což je zobrazení přiřazující A číslo $\mathrm{P}[A]$ z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Ukázky:

„Balíček vám doručíme mezi 10. a 15. hodinou.“

$\mathrm{P}[A] = \frac{12-10{,}75}{5} = \frac{1}{4}$

Elementární jev je čas doručení, čili reálné číslo mezi 10 a 15.

Množina všech elementárních jevů je interval $\Omega = \langle 10, 15 \rangle$.

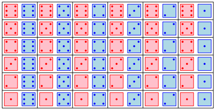
Jevy A jsou možné intervaly doručení $\langle a, b \rangle$: $10 \leq a \leq b \leq 15$.

Pravděpodobnost doručení v intervalu $A = \langle a, b \rangle$ je $\mathrm{P}[A] = \frac{b-a}{5}$.

. . . pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů $a \in \Omega$ coby jednoprvkových intervalů $\langle a, a \rangle$ jsou nulové!

Pravděpodobnostní prostor

Definice: *Diskrétní pravděpodobnostní prostor* je tvořen spočetnou množinou Ω a zobrazením $\mathrm{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to \langle 0, 1\rangle$ splňujícím: $\mathrm{P}[A] = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}[\{\omega\}]$ a také $\mathrm{P}[\Omega] = 1$.



... Ω bývá často dokonce konečná,
... všechny podmnožiny Ω jsou jevy.

Ukázka: Prostor hodů dvěma různými kostkami má 36 elem. jevů, $2^{36} = 68\,719\,476\,736$ jevů, a pravděpodobnost splňuje $\mathrm{P}[A] = \frac{|A|}{36}$.

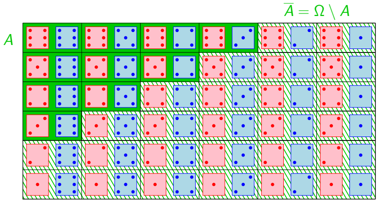
Vlastnosti:

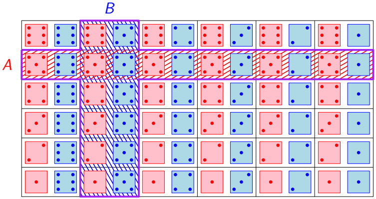
- $\mathrm{P}[\emptyset] = 0$ ... pravděpodobnost, že nenastane ani jeden z možných případů, je nulová.
- $\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] = \mathrm{P}[A \cup B] + \mathrm{P}[A \cap B]$, speciálně $\mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] = \mathrm{P}[A \cup B]$, pokud $A \cap B = \emptyset$.
- $\mathrm{P}[\Omega \setminus A] = 1 - \mathrm{P}[A]$ ... jevy A a $\Omega \setminus A$ se navzájem doplňují v Ω i co do pravděpodobnosti.

Ukázky

Jev „v součtu padne nejvýše 8“ je *doplňkový* k jevu A: „v součtu padne alespoň 9“ a značí se $\overline{A}$.

Jeho pravděpodobnost je $\mathrm{P}\left[\overline{A}\right] = 1 - \mathrm{P}[A] = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$





Jev „alespoň na jedné kostce padne 5“ lze vyjádřit sjednocením jevů A: „na červené padne 5“ a B: „na modré padne 5“.

Má pravděpodobnost
$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$.

Ukázka výpočtu pravděpodobnosti

Úloha: Jaká je pravděpodobnost p_n, že se ve skupině n osob najdou alespoň dva lidé, co mají narozeniny ve stejný den?

Řešení: Pro jednoduchost uvažujme jen roky o 365 dnech.
Množinu Ω tvoří možnosti, kdy může mít n osob narozeniny.
Každé $\omega \in \Omega$ je *zobrazení* z množiny osob do množiny dnů.
Všech takových zobrazení je $|\Omega| = 365^n$. Nechť $\mathrm{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{365^n}$.
Má-li nějaká dvojice stejné narozeniny, zobrazení *není prosté*
Označme $A_n \subseteq \Omega$ množinu těchto zobrazení, co nejsou prostá.

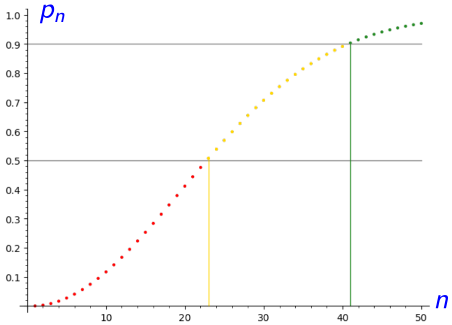
Třeba určit $p_n = \mathrm{P}[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega|}$.

Pro $n \in \{1, \ldots, 365\}$ existuje $\frac{365!}{(365-n)!}$ prostých zobrazení.

Zbývajících je $365^n - \frac{365!}{(365-n)!}$.

Hledaná pravděpodobnost je

$$p_n = \left(365^n - \frac{365!}{(365-n)!}\right) \cdot \frac{1}{365^n}$$
$$= 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$$



Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Kolik elementárních jevů má prostor pro pokus, v němž z koše obsahující 1 bílý, 4 žluté a 4 modré míčky (jinak než barvou nerozlišitelné) vybíráme najednou 3 míčky?
   a) 3, b) 7, c) 9, d) 12, e) 16, f) 50.
2. Pravda nebo lež? Elementární jevy z předchozí otázky mají stejnou pravděpodobnost.
3. Pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami padnou celkem tři oka je: a) $\frac{1}{3}$, b) $3 \cdot \frac{1}{6}$, c) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$, d) $\left(\frac{1}{6}\right)^3$, e) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$.
4. Pravda nebo lež?
   Jevy splňující $A \subsetneq B$ nemohou mít stejnou pravděpodobnost.
5. Pravděpodobnost doplňkového jevu k jevu $A \cup B$ je vždy
   a) rovna $1 - \mathrm{P}[A] - \mathrm{P}[B]$, d) alespoň $1 - \mathrm{P}[A] - \mathrm{P}[B]$,
   b) větší než $1 - \mathrm{P}[A] - \mathrm{P}[B]$, e) nejvýše $1 - \mathrm{P}[A] - \mathrm{P}[B]$,
   c) menší než $1 - \mathrm{P}[A] - \mathrm{P}[B]$, f) ani jedno z uvedených.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Jak souvisejí pravidla pro množinové oprace (např. distributivní zákon) s výpočtem pravděpodobností jevů? Kdy jsou třeba dodatečné podmínky?
- Může mít pravděpodobnostní prostor nekonečnou množinu elemetárních jevů a přitom každý elementární jev nenulovou pravděpodobnost? Případně, mohou mít jen některé jevy nenulovou pravděpodobnost?
- Jaké pravděpodobnostní prostory dostáváme při opakování náhodného pokusu? A co když náhodný pokus sestavíme ze dvou nebo více různých dílčích náhodných pokusů? Co by měla splňovat pravděpodobnost v takto vybudovaných prostorech?

Poznámky k pojmosloví a značení

Pravděpodobnost lze psát verzálkou p, i s oblými závorkami $p(A)$.

Bývá zvykem označit pomocí $\mathcal{F}$ možinu všech uvažovaných jevů.
U diskrétních pravděpodobnostních prostorů je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Jevu s pravděpodobností 1 se říká *jistý*,
zatímco jevy pravděpodobnosti 0 jsou *nemožné*.