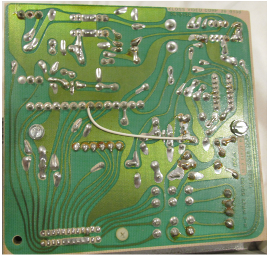
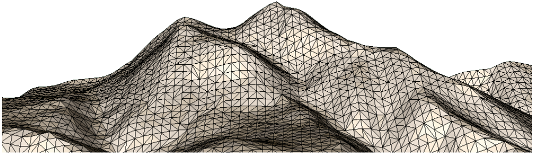
Rovinné grafy

. . . grafy, které se dají nakreslit bez křížení hran.

Mají aplikace například v:

- dopravě, při distribuci surovin,
- návrhu plošných spojů,
- numerické matematice
  — triangulace ploch . . .





Nakreslení grafu

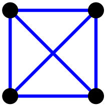
Nakreslení grafu spočívá ve:

- Vyznačení vrcholů jako různé body roviny $\mathbb{R}^2$, a
- vyznačení hran pomocí *oblouků* spojujících příslušné vrcholy. Oblouk je obraz prostého spojitého zobrazení $\langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}^2$.
- Pokud se hrany v nakreslení nekříží, nazývá se *rovinné*.

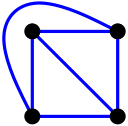
Definice: Graf nazveme *rovinný*, pokud má rovinné nakreslení.

Ukázka:

Graf K_4

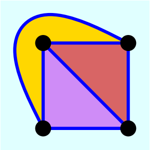


je rovinný, protože ho lze nakreslit bez křížení hran:



Definice: *Stěny* rovinného nakreslení jsou souvislé části roviny ohraničené hranami nakreslení.

Ukázka: Nakreslení K_4 má 4 stěny.
Jedna je vnější — neomezená.

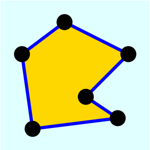


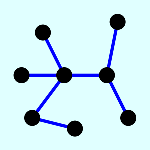
Eulerova formule

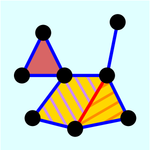
Věta: Pro každé rovinné nakreslení souvislého grafu s množinou stěn F platí: $|V| - |E| + |F| = 2$

Idea důkazu: Indukcí podle počtu stěn.

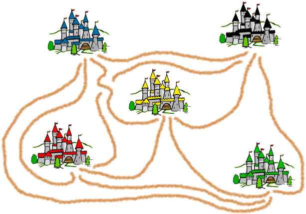
- Nakreslení kružnice rozdělí rovinu na dvě části.
- Souvislé grafy bez kružnic, čili stromy, mají jen jednu stěnu.
- Stromy splňují výchozí případ indukce: $|V| - |E| = 1 = 2 - |F|$
- Přidáním hrany do stěny vzroste počet hran i stěn o 1, čili rozdíl $|F| - |E|$ na levé straně vztahu se nezmění.

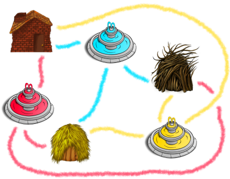






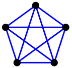
Meze na počet hran rovinných grafů





Pozorování: Každá stěna má alespoň tři hrany, proto

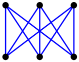
$|F| \leq \frac{2|E|}{3} \;\Rightarrow\; |V| - |E| + \frac{2|E|}{3} \geq 2 \;\Rightarrow\; |E| \leq 3|V| - 6.$



Pro K_5 máme: $|V| = 5, |E| = 10$, ale $10 > 3 \cdot 5 - 6$.

Pozorování: Má-li každá stěna alespoň *čtyři* hrany,

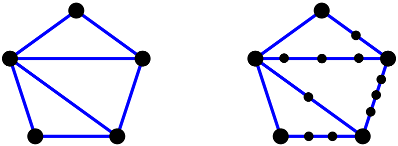
pak $|F| \leq \frac{2|E|}{4} \;\Rightarrow\; |V| - |E| + \frac{|E|}{2} \geq 2 \;\Rightarrow\; |E| \leq 2|V| - 4.$



Pro $K_{3,3}$ máme: $|V| = 6, |E| = 9$, ale $9 > 2 \cdot 6 - 4$.

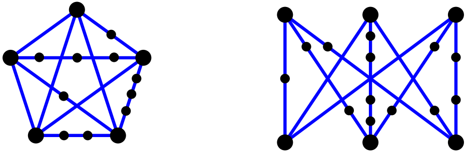
Kuratowského věta

Definice: Pokud v grafu nahradíme libovolné hrany cestami délky alespoň 1, dostaneme jeho *dělení*.



Pozorování: Dělení grafu G je rovinné právě když je rovinný G.

Věta: Graf je rovinný, *právě když* neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$.



Platónská tělesa

Pravidelné mnohostěny, kde všechny vrcholy mají stejný stupeň d a všechny stěny tvoří stejný pravidelný k-úhelník.

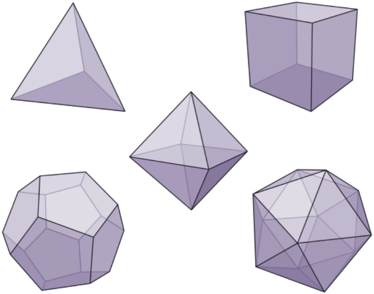
Zřejmě $d, k \geq 3$ a dále

$|V| = \frac{2|E|}{d}$, $|F| = \frac{2|E|}{k}$

Dosazení do Eulerova vzorce dává:

$$\frac{2|E|}{d} - |E| + \frac{2|E|}{k} = 2 \;\Rightarrow$$
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} > \frac{1}{d} + \frac{1}{k} - \frac{1}{|E|} = \frac{1}{2}$$

Odtud $d, k \leq 5$.



Rozbor případů vede na existenci jen pěti platónských těles:

	čtyřstěn,	*krychle*,	*osmistěn*,	*dvanáctistěn* a	*dvacetistěn*.
d	3	3	4	3	5
k	3	4	3	5	3

Kvíz

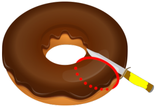
Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Graf na 10 vrcholech s 15 hranami
   a) je vždy rovinný, b) může, ale ani nemusí být rovinný,
   c) je vždy nerovinný, d) žádný takový neexistuje.
2. Pravda nebo lež?
   Přidáme-li ke stromu tři hrany, dostaneme vždy rovinný graf.
3. Kolik stěn může mít 4-regulární rovinný graf na 18 vrcholech?
   a) 17, b) 18, c) 19, d) 20, e) 21, f) 22, g) 23, h) neexistuje.
4. Pravda nebo lež?
   Pokud má bipartitní rovinný graf na n vrcholech $2n - 4$ hran, potom je každá stěna v rovinném nakreslení ohraničena C_4.
5. Které z platónských těles má nejvíce hran? a) čtyřstěn,
   b) krychle, c) osmistěn, d) dvanáctistěn, e) dvacetistěn.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Může mít tentýž graf dvě různá nakreslení, která se liší velikostmi stěn?
- Může mít tentýž graf dvě různá nakreslení, která se liší počtem stěn?
- Jak lze zobecnit Eulerův vztah pro nesouvislé grafy?
- Jaký nejvyšší počet hran může mít graf na n vrcholech, pokud všechny stěny mají alespoň 5 vrcholů?
- Může existovat konečný rovinný graf takový, že všechny jeho vrcholy mají stupeň alespoň 6?

Poznámky k pojmosloví a značení

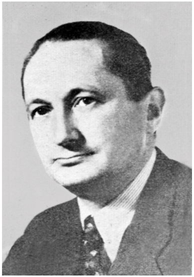


Fakt, že uzavřená neprotínající se křivka, tzv. *topologická kružnice*, dělí rovinu na dvě části je netriviální věta pojmenovaná po C. Jordanovi.
Je podstatné, že jde o rovinu, např. na toru neplatí.

K. Kuratowski publikoval svou větu o charakterizaci rovinných grafů r. 1930.

Větu dokázali i L. S. Pontrjagin (1927), O. Frink a P. Smith (1930).

Pro rozpoznání rovinných grafů existují efektivní algoritmy.



Kazimierz Kuratowski
1896 – 1980