Souvislost a cesty v grafech

. . . určují, zdali se z jednoho vrcholů dá po několika hranách dostat do jiného vrcholu, případně jak.

- zdali jsou dvě města spojena silnicí 1. třídy
- kolik přestupů je třeba provést na cestě mezi dvěma městy
- zdali jsou v sociálních sítích izolované „bubliny"
- jak naplánovat cestu po památkách, nákupech, . . .

Připomenutí:
Cesta P_n na vrcholech $v_1, \ldots, v_n$ má hrany $(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$.

Definice: *Délka cesty* se měří počtem *hran*,
čili cesta délky n je P_{n+1} a nikoli P_n.

Cesty, tahy, sledy

... různé možnosti přechodu mezi dvěma vrcholy.

Definice: *Cesta v grafu G* je jeho podgraf, který je izomorfní cestě. Jinými slovy, je to posloupnost $v_1, \ldots, v_n$ *různých* vrcholů z G vybraných tak, že $(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ jsou v G hrany.

Pozorování: Cesta má různé vrcholy, proto se její hrany neopakují.

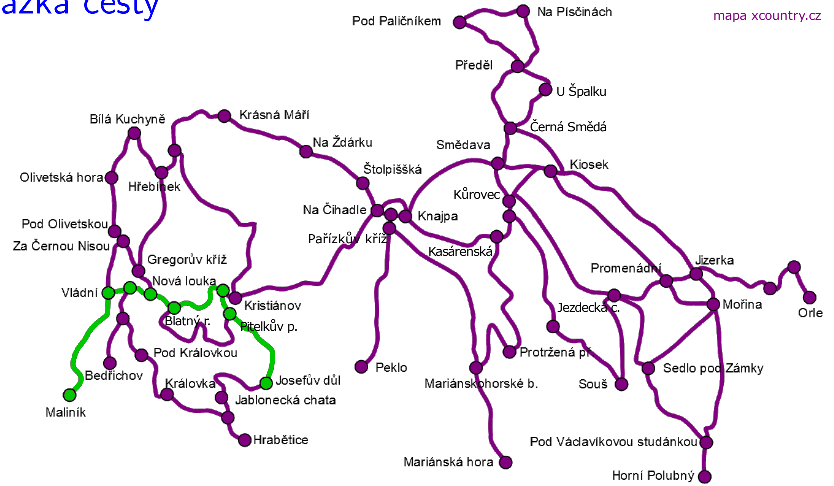
Definice: *Tah* v grafu G je posloupnost $v_1, \ldots, v_n$ vrcholů z G vybraných tak, že $(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ jsou v G *různé* hrany.
... v tahu se hrany neopakují, vrcholy se mohou opakovat.

Definice: *Sled* v grafu G je posloupnost $v_1, \ldots, v_n$ vrcholů z G vybraných tak, že $(v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ jsou v G hrany.
... ve sledu se mohou opakovat vrcholy i hrany.

Pozorování: Každá cesta je zároveň i tahem; každý tah je i sled.
Podobně jako u cest je délka tahu či sledu dána počtem hran.

Ukázka cesty

mapa xcountry.cz



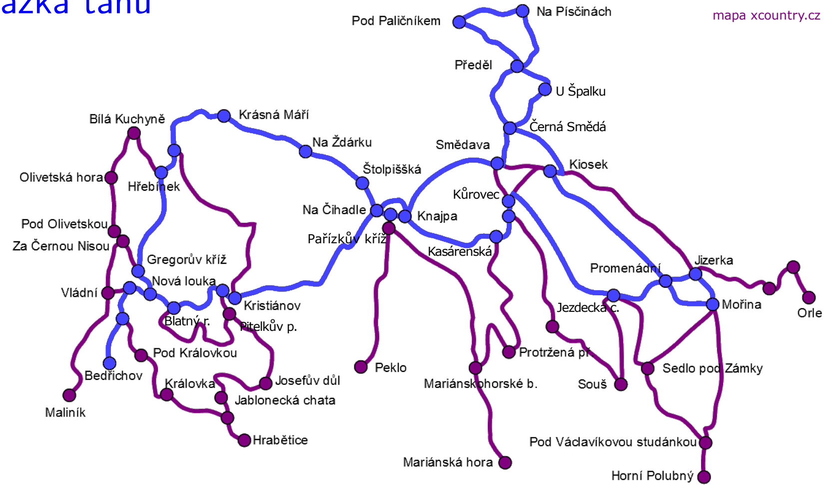
E: udržované jizerskohorské lyžařské stopy, *V*: křižovatky a zastavení

Maliník, Vládní, U Nové Louky, Nová Louka, Blatný rybník, Pod Kristiánovem, Pitelkův pomníček, Josefův Důl

— vrcholy a tudíž ani hrany se neopakují

— délka cesty je 7 (hran), ve skutečnosti asi 9 km

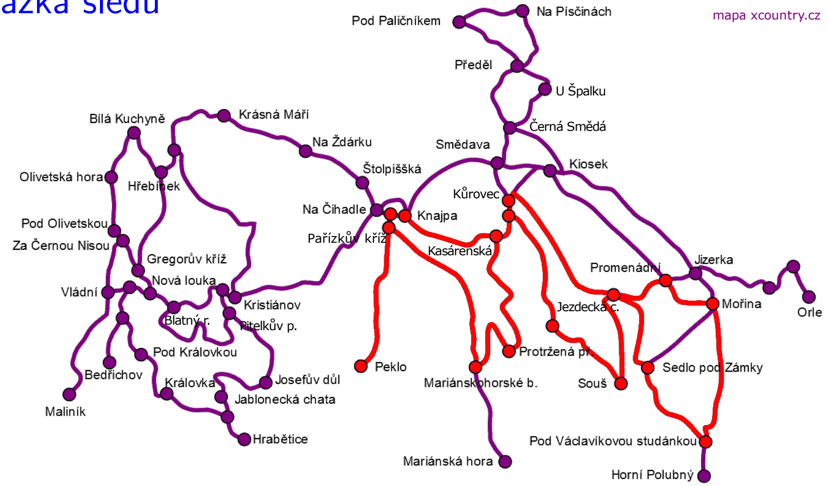
Ukázka tahu



Bedřichov, U Buku, U Nové Louky, Nová Louka, Blatný rybník, Pod Kristiánovem, Kristiánov, Na Čihadle, U Knejpy, Knajpa, Kasárenská, U Studánky, Kůrovec, Jezdecká cesta, Promenádní, Jizerka, Mořina, Promenádní, Kiosek, Černá Smědá, U Špalku, Předěl, Na Písčinách, Pod Paličníkem, Předěl, Černá Smědá, Smědava, Knajpa, Na Čihadle, Štolpišská, Na Žďárku, Krásná Máří, Točna, Hřebínek, Gregorův Kříž, Nová Louka

— vrcholy se mohou opakovat, např. Knajpa, Předěl, hrany nikoli

Ukázka sledu



Pod Václavíkovou studánkou, Sedlo pod Zámky, Jezdecká cesta, Souš, kříž Jiránka a Kosinové, U Studánky, Kasárenská, Protržená přehrada, Mariánskohorské boudy, Pařízkův kříž, Peklo, Pařízkův kříž, U Knejpy, Knajpa, Kasárenská, U Studánky, Kůrovec, Jezdecká cesta, Promenádní, Mořina, Pod Václavíkovou studánkou

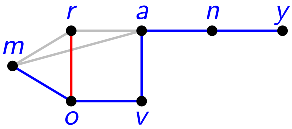
— vrcholy i hrany se mohou opakovat, např. (Pařízkův kříž, Peklo)

Souvislé grafy

… po hranách lze přejít z libovolného vrcholu do všech ostatních.

Pozorování: Spojuje-li dva vrcholy sled, pak jsou spojené i cestou.
… vynechání úseku mezi opakovanými výskyty téhož vrcholu zkrátí sled. Nelze-li už sled takto zkrátit, jde o cestu.

Ukázka: Ve sledu $m, r, a, m, o, r, o, v, a, n, y$ se opakuje např. m.
Vynecháním úseku m, r, a, m dostaneme sled m, o, r, o, v, a, n, y.
V další iteraci jej zkrátíme na tah m, o, v, a, n, y. Postupů je více, např. vynechání a, m, o, r, o, v, a vede rovnou na tah m, r, a, n, y.



Souvislé grafy

... po hranách lze přejít z libovolného vrcholu do všech ostatních.

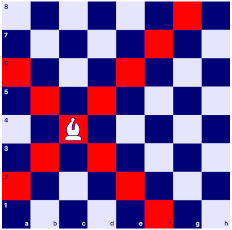
Pozorování: Spojuje-li dva vrcholy sled, pak jsou spojené i cestou.
... vynechání úseku mezi opakovanými výskyty téhož vrcholu zkrátí sled. Nelze-li už sled takto zkrátit, jde o cestu.

Ukázka: Ve sledu $m, r, a, m, o, r, o, v, a, n, y$ se opakuje např. m. Vynecháním úseku m, r, a, m dostaneme sled m, o, r, o, v, a, n, y. V další iteraci jej zkrátíme na tah m, o, v, a, n, y. Postupů je více, např. vynechání a, m, o, r, o, v, a vede rovnou na tah m, r, a, n, y.

Definice: Graf je *souvislý*, pokud mezi každými jeho dvěma vrcholy vede cesta; v opačném případě je *nesouvislý*.

Ukázky: Graf jizerskohorských stop je souvislý.

Mějme graf G, jehož vrcholy V tvoří pole šachovnice, a hrany odpovídají možným tahům střelce; např. $(\mathrm{c4}, \mathrm{f1}) \in E$. Tento graf tahů střelce je nesouvislý, protože střelec nemůže přejít ze světlého pole na tmavé.



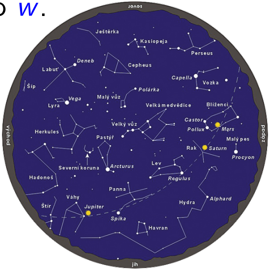
Komponenty souvislosti

… odpovídají rozštěpení grafu na oddělené části.

Pozorování: Relace $\sim$ na V definovaná předpisem:
$u \sim v$, právě když mezi u a v vede cesta, je ekvivalence.

- $\sim$ je reflexivní: cesta nulové délky z u do u, dává $u \sim u$.
- $\sim$ je symetrická: cestu z u do v, lze projít opačně z v do u.
- $\sim$ je tranzitivní: zřetězení cesty z u do v s cestou z v do w je sled z u do w. Z nej lze vybrat cestu z u do w.

Definice: Třídy ekvivalence $\sim$ se nazývají *komponenty souvislosti*.



Ukázky: Graf tahů střelce má dvě komponenty. Jednu tvoří světlá pole a druhou tmavá pole.

Komponenty grafu na hvězdné mapě jsou souhvězdí, izolované hvězdy, planety a galaxie.

Pozorování: Souvislé grafy mají jen jednu komponentu souvislosti.

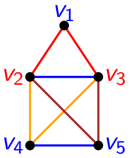
Matice sousednosti

... již známý způsob reprezentace grafu coby relace.

Definice: *Matice sousednosti* grafu G na vrcholech $v_1, \dots, v_n$

je matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{pokud } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$

Ukázka:



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pozorování: Druhá mocnina matice sousednosti $\boldsymbol{A}^2$ grafu G má na pozici $(\boldsymbol{A}^2)_{ij}$ počet společných sousedů vrcholů v_i a v_j, neboli počet sledů délky 2 z v_i do v_j. Volba $i = j$ dává $(\boldsymbol{A}^2)_{ii} = \deg(v_i)$.

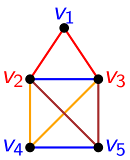
Důkaz: Ve vzorci pro součin $(\boldsymbol{A}^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$ jsou oba činitelé rovny 1, právě když je v_k sousedí s v_i i s v_j; jinak je součin roven 0.

Matice sousednosti

... již známý způsob reprezentace grafu coby relace.

Definice: *Matice sousednosti* grafu G na vrcholech $v_1, \ldots, v_n$ je matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{pokud } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$

Ukázka:



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Pozorování: Druhá mocnina matice sousednosti $\boldsymbol{A}^2$ grafu G má na pozici $(\boldsymbol{A}^2)_{ij}$ počet společných sousedů vrcholů v_i a v_j, neboli počet sledů délky 2 z v_i do v_j. Volba $i = j$ dává $(\boldsymbol{A}^2)_{ii} = \deg(v_i)$.

Důsledek: Pro $k \in \mathbb{N}$ má k-tá mocnina matice sousednosti $\boldsymbol{A}^k$ grafu G má na pozici $(\boldsymbol{A}^k)_{ij}$ počet sledů délky k z v_i do v_j.

Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pravda nebo lež?
   Z každého sledu lze vybrat tah.
2. Kolik komponent souvislosti má graf na vrcholech $V = \{1, 9, 11, 15, 64, 75, 77, 101, 125, 128, 225, 1\,001, 1\,024\}$, kde hrany tvoří soudělné dvojice: $E = \{(u, v) : \mathrm{nsd}(u, v) > 1\}$?
   a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6, g) 7, h) 13.
3. Kolik komponent může mít graf na 10 vrcholech se 7 hranami?
   a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6, g) 7, h) 8, i) 9, j) 10.
4. Počet trojúhelníků (podgrafů izomorfních C_3) v libovolném grafu G s maticí sousednosti $\boldsymbol{A}$ je roven výrazu:
   a) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^3$, b) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^3$, c) $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{A}^3)_{ij}$, d) $\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{A}^3)_{ii}$.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Má každý souvislý graf cestu, která projde všemi vrcholy?
  Má každý souvislý graf tah, který projde všemi hranami?
  Má každý souvislý graf sled, který projde všemi hranami?
- Kolik nejvíce hran může mít graf na n vrcholech
  s k komponentami souvislosti?
- Jaké grafové operaci odpovídá součet matic sousednosti?
- Jak souvisí nenulovost prvků v mocninách matice sousednosti grafu s určením jeho komponent souvislosti?
  Platí například, že pro dost velké k je $(\boldsymbol{A}^k)_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow v_i \sim v_j$?

Poznámky k pojmosloví a značení

Anglické názvosloví:
cesta — *path*, tah — *trail*, sled — *walk*,
matice sousednosti — *adjacency matrix*,
souvislý graf — *connected graph*.

Pozor na příbuzný, ale odlišný koncept *matice incidence*
$\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{|V|\times|E|}$, dané předpisem: $(\boldsymbol{I})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i \in e_j \\ 0 & \text{pokud } v_i \notin e_j \end{cases}$