# Princip inkluze a exkluze

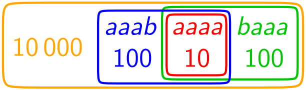
. . . úlohy vedoucí na určení velikosti sjednocení množin pomocí mohutností jejich průniků. Ty může být lehčí spočítat, protože pro průniky platí zároveň vymezující podmínky jednotlivých množin.

- Jaká je šance, že při registraci auta dostanete značku, která má ve čtyřčíslí tři nebo čtyři stejné cifry vedle sebe?

Řešení: Na 10 000 čtyřmístných značek je:

- 100 s prvními třemi ciframi stejnými: $aaab\colon a, b \in \{0, \ldots, 9\}$,
- 100 s posledními třemi ciframi stejnými: $baaa$,
- 10 se všemi ciframi stejnými: $aaaa$.

Celkem $100 + 100 - 10 = 190$.
Společných 10 je třeba odečíst, protože už jsou započteny dvakrát, konkrétně v první i ve druhé stovce.




Odpověď: Pravděpodobnost je malá, jen $\frac{190}{10\,000} = 1{,}9\ \%$.

# Princip inkluze a exkluze

… úlohy vedoucí na určení velikosti sjednocení množin pomocí mohutností jejich průniků. Ty může být lehčí spočítat, protože pro průniky platí zároveň vymezující podmínky jednotlivých množin.

- Jaká je šance, že při registraci auta dostanete značku, která má ve čtyřčíslí tři nebo čtyři stejné cifry vedle sebe?
- Kolika způsoby lze rozsadit hosty kolem stolu, aby žádná dvojice manželů neseděla vedle sebe?
- Kolik je prvočísel menších než $100$?

Typickou úlohou je spočítání zobrazení na množinu (surjektivních).

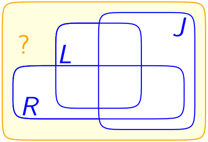
- Kolika způsoby lze rozmístit úřady s celostátní působností do krajských měst, aby v každém byl aspoň jeden?
- Kolika způsoby lze naplánovat úlohy na několik počítačů, aby každý měl přiřazenu alespoň jednu?

Pomocí principu inkluze a exkluze v ní počítáme doplněk množiny všech zobrazení, tedy zobrazení, která nejsou na. Pro každý prvek cílové množiny určíme množinu zobrazení, která jej míjí.

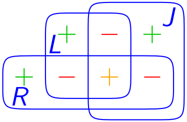
# Velikost sjednocení tří množin

Úloha: Kolika způsoby lze rozdat jablko, hrušku, jahodu, meruňku a švestku mezi Radovana, Libušku a Jaromíra tak, aby každé z dětí dostalo nějaké ovoce?

Nejprve spočítáme *nevhodná* rozdělení, tj. kdy některé dítě nic nedostane. Označme si $R$, $L$ a $J$ množiny případů, kdy Radovan, Libuška, resp. Jaromír nic *nedostanou*.
Naším pomocným cílem je určit $|R \cup L \cup J|$.




Velikost každé z množin je třeba *započítat*. Nyní jsou v $|R| + |L| + |J|$ prvky z průniků dvou množin, tj. $R \cap L$, $R \cap J$ a $L \cap J$, započteny dvakrát, proto je třeba jejich počty *odečíst*.



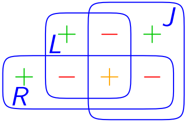

Ovšem ve výrazu $|R| + |L| + |J| - |R \cap L| - |R \cap J| - |L \cap J|$ byly prvky z $R \cap L \cap J$ třikrát přičteny i odečteny a musí se zas *přičíst*.

Dostáváme: $|R \cup L \cup J| =$

$$= |R| + |L| + |J| - |R \cap L| - |R \cap J| - |L \cap J| + |R \cap L \cap J|$$

# Velikost sjednocení tří množin

Všech možných rozdání, včetně těch, kdy některé z dětí nedostane nic, je stejně jako zobrazení z pětiprvkové množiny ovoce do tříprvkové množiny dětí, neboli $3^5 = 243$.




U množin $R$, $L$, a $J$ se ovoce dělí mezi zbylé dvě děti, a proto $|R| = |L| = |J| = 2^5 = 32$.

Také se může stát, že některá dvojice nedostane nic, a pak všechno dostane třetí: $|R \cap L| = |R \cap J| = |L \cap J| = 1^5 = 1$.

Ovoce však nějak musí být rozdáno, tudíž $R \cap L \cap J = \emptyset$.

$$\begin{aligned} |R \cup L \cup J| &= \\ &= |R| + |L| + |J| - |R \cap L| - |R \cap J| - |L \cap J| + |R \cap L \cap J| \\ &= 32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0 = 93. \end{aligned}$$

Odpověď: Celkem je $243 - 93 = 150$ možností, jak rozdat ovoce tak, aby každé dítě dostalo alespoň jeden kus.

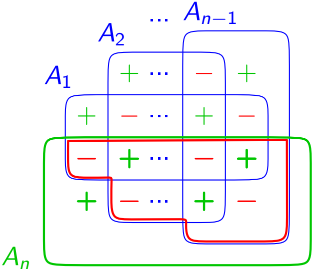
Poznámka: Šlo o zobrazení z $5$-prvkové množiny *na* $3$-prvkovou.

# Princip inkluze a exkluze

Věta: Mohutnost sjednocení $n$ konečných množin $A_1, \dots, A_n$ je dána vzorcem: $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap \dots \cap A_n|$

Důkaz indukcí: Nechť pro *libovolných* $n-1$ množin $A'_1, \dots, A'_{n-1}$ platí (IP):

$$|A'_1 \cup \dots \cup A'_{n-1}| = |A'_1| + |A'_2| + \dots + (-1)^n |A'_1 \cap \dots \cap A'_{n-1}|$$




Využijeme distributivitu $\cap$ vůči $\cup$:

$$(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup \dots \cup (A_{n-1} \cap A_n)$$

Pak platí: $|A_1 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n| =$

$$= |A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| + |A_n| - |(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \cap A_n|$$

$$\overset{2\times \mathrm{IP}}{=} |A_1| + |A_2| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}| + |A_n|$$

$$- (|A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_n| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n|)$$

$$= |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n|$$

$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

# Počet permutací bez pevného bodu

Úloha: Kolik je substitučních šifer, v nichž se žádné písmeno nezobrazí samo na sebe?

Definice: Prvek $i$ je *pevný bod* permutace $\pi$, pokud $\pi(i) = i$.

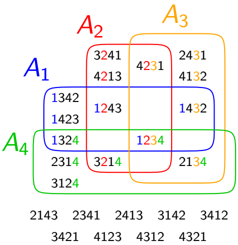
Jinými slovy, máme určit počet permutací bez pevných bodů.

Jednodušší je spočítat permutace *s předepsanými* pevnými body.

Pro permutace na $n$-prvkové množině označme $A_i = \{\pi : \pi(i) = i\}$ množinu permutací s pevným bodem $i$.

Platí $|A_i| = (n-1)!$, protože obraz $i$-tého prvku je předepsán a ostatní lze zpemutovat libovolně.

Ukázka: pro $n = 4$




Podobně, průnik $k$ množin má $(n-k)!$ prvků, protože $k$ prvků má obraz předepsán a ostatní lze zpermutovat libovolně.

# Počet permutací bez pevného bodu

Podle principu inkluze a exkluze je permutací *bez* pevného bodu:

$$n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = n! - \Big(|A_1| + \cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap \cdots \cap A_n|\Big)$$

$$= n! - \left(\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)!\right)$$

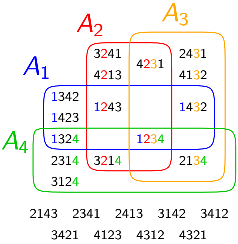
Ukázka: pro $n = 4$

$$4! - |A_1 \cup \cdots \cup A_4| =$$

$$= 4! - \Big(|A_1| + \cdots - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\Big)$$

$$= 4! - \left(\binom{4}{1}3! - \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}1! - \binom{4}{4}0!\right)$$

$$= 24 - (4 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 9$$




Dalšími úpravami dostaneme:

$$n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \frac{n!}{0!} - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \cdots (-1)^n \frac{n!}{n!} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Výraz $\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$ má limitu: $\frac{1}{e} \doteq 0{,}367\,879\,441\,171\,442\,321\,595\,523\,770\,161$

Pro $n = 26$ dostáváme podíl substitučních šifer bez pevného bodu:

$$\frac{148\,362\,637\,348\,470\,135\,821\,287\,825}{403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000} \doteq 0{,}367\,879\,441\,171\,442\,321\,595\,523\,770\,250$$

# Kvíz — řešení

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Jsou-li $A$, $B$ a $C$ konečné množiny, jaký je vztah mezi $x = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|$ a $y = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C|$?
   a) $x = y$, b) $x \geq y$, c) $x > y$, d) $x \leq y$, e) $x < y$, f) žádný.
2. Mají-li každé dvě z pěti $10$-prvkových množin $2$ prvky společné a žádné tři nemají společný prvek, kolik prvků mají celkem?
   a) 10, b) 20, c) 30, d) 40, e) 50, f) 60, g) 70.
3. Pravda nebo lež?
   Pokud je některý člen ve vzorci pro princip inluze a exkluze nulový (tj. ve výrazu $|A_1| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$), potom jsou všechny členy následující za ním také nulové.
4. Pokud pro konečné množiny platí $|A_1 \cap \cdots \cap A_n| = 5$, potom
   a) $n$ je liché, b) 5 dělí $|A_1 \cup \cdots \cup A_n|$, c) $n \geq 5$,
   d) $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \geq 5$, e) nic z uvedeného.

# Otázky k porozumění tématu přednášky

- Kolik sčítanců ve vzorci pro princip inluze a exkluze má kladné znaménko a kolik záporné?
- Jaký je obecný vzorec pro počet zobrazení z množiny velikosti $n$ na množinu velikosti $m$?
- Kolik množin násobků je třeba vzít v potaz pro určení počtu prvočísel menších než $100$?
- Proč se součet prvních $n$ členů řady $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ liší od její limity $\frac{1}{e}$ o méně než $\frac{1}{n!}$?

# Poznámky k pojmosloví a značení

Název „princip inkluze a exkluze“ vychází z postupu založeného na příliš velkorysém začlenění, po němž následuje kompenzační vyloučení. Koncept je připisován Abrahamu de Moivre (1718), ačkoli poprvé se objevuje až v článku Daniela da Silvy (1854).

Úloha o podílu permutací bez pevného bodu bývá v literatuře nazývána *problém šatnářky* (Hatcheck lady problem).

Postup určení prvočísel vyšktáním jejich násobků je známé *Eratosthenovo síto*.