Zobrazení

…popisuje situaci, kdy jsou prvkům jedné množiny jednoznačně přiřazeny prvky z (jiné nebo i stejné) množiny.

Ukázky

- vztah rodičovství, kdy dítěti d je přiřazena jeho matka m,
- ve městě m je zvolen starosta s,
- z českého slova s je vybráno první písmeno p,
- u slova s určíme počet samohlásek h,
- síťovému rozhraní r (počítače) je přiřazena IP adresa a,
- z reálného čísla x spočítáme hodnotu $x^2 - 2x$.

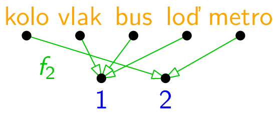
Definice *Zobrazení* z množiny X do množiny Y je relace R taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xRy.

Zobrazení

Definice *Zobrazení* z množiny X do množiny Y je relace R taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ takové, že xRy.
Pro zobrazení používáme malá písmena f, g apod.
Namísto xfy a $(x, y) \in f$ píšeme $y = f(x)$ a říkáme, že y je *obrazem* prvku x. Zobrazení f z X do Y značíme $f : X \to Y$.

Ukázky

- Pro množiny $S = \{\text{kolo}, \text{vlak}, \text{bus}, \text{loď}, \text{metro}\}$, $P = \{\text{a}, \ldots, \text{z}\}$ je relace $f_1 = \{(\text{kolo}, \text{k}), (\text{vlak}, \text{v}), (\text{bus}, \text{b}), (\text{loď}, \text{l}), (\text{metro}, \text{m})\}$ zobrazením $f_1 : S \to P$. Zde f_1 přiřazuje slovu první písmeno.
- Zobrazení $f_2 : S \to \{1, 2\}$ dané $f_2(\text{vlak}) = f_2(\text{bus}) = f_2(\text{loď}) = 1$ a $f_2(\text{kolo}) = f_2(\text{metro}) = 2$ přiřazuje slovu počet jeho samohlásek.



- Zobrazení $f_3(x) : P \to \{97, \ldots, 122\}$, které vrátí u malého písmene bez diakritiky jeho ASCII kód v desítkové soustavě.
- Reálná funkce daná $f_4(x) = x^3 - 4x$ je zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

Přiřazení více prvků

Lze zobrazením přiřadit „více prvků naráz“, např. rodiči jeho děti?

Potřebujeme, aby cílová množina obsahovala *množiny prvků*.

Definice: Množinu všech podmnožin množiny X (včetně prázdné) nazveme *potenční množinou* množiny X a značíme ji $\mathcal{P}(X)$.

Ukázka: Pro $X = \{1, 2\}$ máme $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Máme-li prvkům z X přiřadit více prvků z Y, buď použijeme relaci mezi X a Y, nebo zobrazení $X \to \mathcal{P}(Y)$ (nikoli „jen“ $X \to Y$).

Ukázka: Zobrazení f_5 na množině Lucemburků $X = \{\mathrm{j}, \mathrm{k}, \mathrm{v}, \mathrm{z}\}$ dané $f_5(\mathrm{j}) = \{\mathrm{k}\}$, $f_5(\mathrm{k}) = \{\mathrm{v}, \mathrm{z}\}$ a $f_5(\mathrm{v}) = \mathrm{f}_5(\mathrm{z}) = \emptyset$ přiřazuje otci *množinu* jeho synů, čili jde o zobrazení $f_5 : X \to \mathcal{P}(X)$.

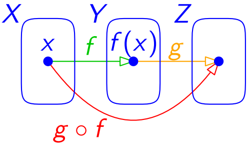
I když zobrazení f_5 popisuje stejné vztahy jako relace R_1 minule, jde o různé matematické struktury.

Podobně zobrazení, které kladnému přirozenému číslu x přiřadí množinu jeho dělitelů, je zobrazení $\mathbb{N}^+ \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$.

Skládání zobrazení

Máme definováno skládání relací a známe skládání reálných funkcí. Jak je to se skládáním zobrazení?

Značení: Pro zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ se *složené zobrazení* značí $g \circ f : X \to Z$.
Pak platí: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



$g(f(x)) =$
$(g \circ f)(x)$

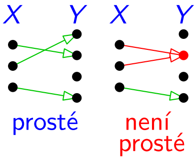
Pozor na obrácené pořadí než u skládání relací, kde se píše $f \circ g$.

Ukázky: Pro $f(x) = \exp(x)$, $g(x) = \sin(x)$,
dostáváme: $(g \circ f)(x) = (\sin \circ \exp)(x) = \sin(\exp(x))$,
$(f \circ g)(x) = (\exp \circ \sin)(x) = \exp(\sin(x))$.

Pro f_1, které slovu přiřadí první písmeno, a f_3, které u písmene vrátí jeho ASCII kód, je $f_3 \circ f_1$ zobrazení, které vrací ASCII kód prvního písmene slova, např. $(f_3 \circ f_1)(\text{kolo}) = f_3(f_1(\text{kolo})) = f_3(\text{k}) = 107$.

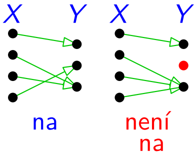
Obrácené složení $f_1 \circ f_3$ nemá smysl, protože f_1 je definováno na množině slov S, a nikoli na množině ASCII kódů, t.j. čísel.

Prosté zobrazení a zobrazení na



Definice: Zobrazení $f : X \to Y$ je *prosté*, pokud se obrazy různých prvků liší, formálně $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. V grafu prostého zobrazení do Y vede do každého vrcholu Y nejvýše jedna šipka.

Ukázky: Zobrazení f_1 je prosté, protože všechna slova v S začínají různými písmeny. Naopak, f_2 prosté není, protože např. slova vlak a loď mají stejný počet samohlásek, neboli $f_2(\text{vlak}) = f_2(\text{loď}) = 1$.

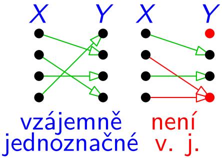


Definice: Zobrazení $f : X \to Y$ je *na*, pokud je každý prvek Y obrazem alespoň jednoho prvku z X, formálně $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

V grafu zobrazení na Y vede do každého vrcholu Y alespoň jedna šipka.

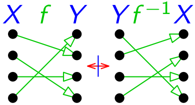
Ukázky: Zobrazení f_1 není na, např. protože žádné slovo z množiny S nezačíná písmenem a. Naopak, f_2 je na, protože v množině S jsou slova s jednou (loď) i se dvěma samohláskami (kolo).

Vzájemně jednoznačné zobrazení



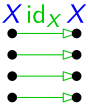
Definice: Zobrazení $f : X \to Y$, které je zároveň prosté i na, se nazývá *vzájemně jednoznačné*.
V grafu vzájemně jednoznačného zobrazení mezi X a Y vede do každého vrcholu Y jedna šipka.

Ukázka: Zobrazení f_3 je vzájemně jednoznačné, protože různá písmena z P mají různé ASCII kódy, a každé číslo z množiny $\{97, \dots, 122\}$ je kódem nějakého písmene z P.



Pozorování: Pokud je $f : X \to Y$ vzájemně jednoznačné zobrazení, potom relace inverzní k f je také zobrazení a značí se f^{-1}.
Toto *inverzní zobrazení* $f^{-1} : Y \to X$ je vzájemně jednoznačné.
Inverzní zobrazení získáme otočením směru šipek (jako u relací).

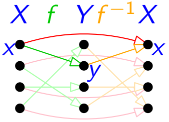
Ukázky: Inverzní zobrazení k f_3 je zobrazení f_3^{-1}, které ASCII kódu z množiny $\{97, \dots, 122\}$ přiřadí odpovídající písmeno z P.



Identická relace id_X dává i vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathrm{id}_X : X \to X$, zvané *identita* (též identické zobrazení).

Tvrzení o zobrazeních

Pro vzájemně jednoznačné zobrazení $f : X \to Y$ platí: $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$

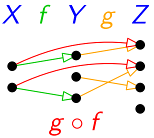


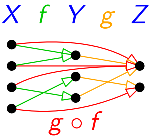
$f(x) = y$ $f^{-1}(y) = x$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

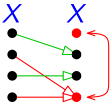
Složení prostých zobrazení je prosté.

Složení zobrazení na je na.



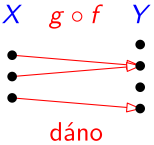


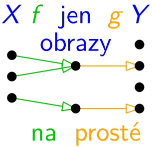
Pro zobrazení $f : X \to X$ na *konečné* množině X platí: f je prosté, právě když je na.



Do X vchází tolik hran, kolik má X vrcholů. Buď nastanou obě situace najednou, nebo ani jedna.

Každé zobrazení lze zapsat jako složení $g \circ f$, kde f je zobrazení na a g je prosté.





Kvíz

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Složení zobrazení (funkcí) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ je
   a) $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ a $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$,
   b) $(f \circ g)(x) = (\sin x)^2$ a $(g \circ f)(x) = \sin(x^2)$,
   c) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \sin(x^2)$,
   d) $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = (\sin x)^2$.
2. Reálná funkce $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná $f_4(x) = x^3 - 4x$
   a) je prostá, ale není na, b) je na, ale není prostá,
   c) protože je na, musí být i prostá.
3. Každé zobrazení $f : X \to Y$ mezi konečnými $|X| < |Y|$
   a) je na, b) není na, c) je prosté, d) není prosté.
4. Pravda nebo lež? Pro bijekce platí $f^a \circ f^b = f^{a+b}$ pro $a, b \in \mathbb{Z}$.
   (Kladný exponent odpovídá opakovanému skládání f:
   $f^a = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{a\times}$; záporný podobně pro f^{-1}; $f^0 = \mathrm{id}$.)

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Lze relaci mezi X a Y také reprezentovat pomocí zobrazení, které využívá množiny $\mathcal{P}(X)$ a Y?
- Proč u zobrazení, která nejsou prostá, resp. na, není inverzní relace také zobrazení?
- Jak by se do vlastností zobrazení promítly další vlastnosti relací, konkrétně reflexivita a symetrie?

Poznámky k pojmosloví a značení

Pojem *funkce* se někdy bere za synonymum pro zobrazení.
Často jsou funkce zobrazení mezi číselnými obory, např. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
a bývají zadány nějakým předpisem, např. $f(x) = x \sin(x)$.

Potenční množina ze někdy značí 2^X.
Pro mohutnost potenční množiny totiž platí: $|\mathcal{P}(X)| = |2^X| = 2^{|X|}$.

Prostá zobrazení se nazývají *injektivní*, zobrazení na jsou
surjektivní a vzájemně jednoznačným se říká *bijektivní*.