Částečné uspořádání

... je druhem relace, která vyjdařuje porovnání.
Některé dvojice prvků mohou být neporovnatelné.

Ukázky

- vztah „být předkem“ na množině osob
- hierarchie uzemních samospráv na krajích, okresech a obcích,
- seřazení slov ve slovníku,
- v plánování vztah „musí být provedeno před“
- neostré porovnání k-tic přirozených čísel ve všech složkách.

Značení: Podobnými symboly jako uspořádání čísel $\leq$, např. $\subseteq$, $\preceq$.

Definice: *(Částečné) uspořádání* $\preceq$ na množině X je relace

- reflexivní: $\forall x \in X : x \preceq x$ ... každé x je v $\preceq$ samo se sebou
- antisymetrická: $(x \preceq y \wedge y \preceq x) \Rightarrow x = y$
  ... vztah nikdy není „oboustranný“, nemá symetrický pár
- tranzitivní $x \preceq y \wedge y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ ... vztah se „přenáší dál“

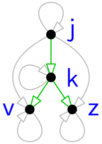
Ukázky částečných uspořádání

Uspořádání je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace.
Může obsahovat i *neporovnatelné* dvojice: $x \not\preceq y \wedge y \not\preceq x$.

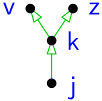
- Relace „být předkem“ na množině Lucemburků:
  Prvky v a z jsou neporovnatelné.

  Hasseův diagram: z grafu relace na X vynecháme smyčky a hrany, které lze odvodit z tranzitivity (šedé), a zbylé hrany vedeme směrem vzhůru.

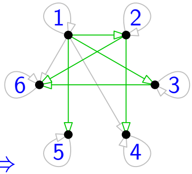
Graf relace

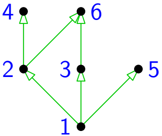


Hasseův diagram



- Uspořádání dělitelností na množině $\{1, \ldots, 6\}$:



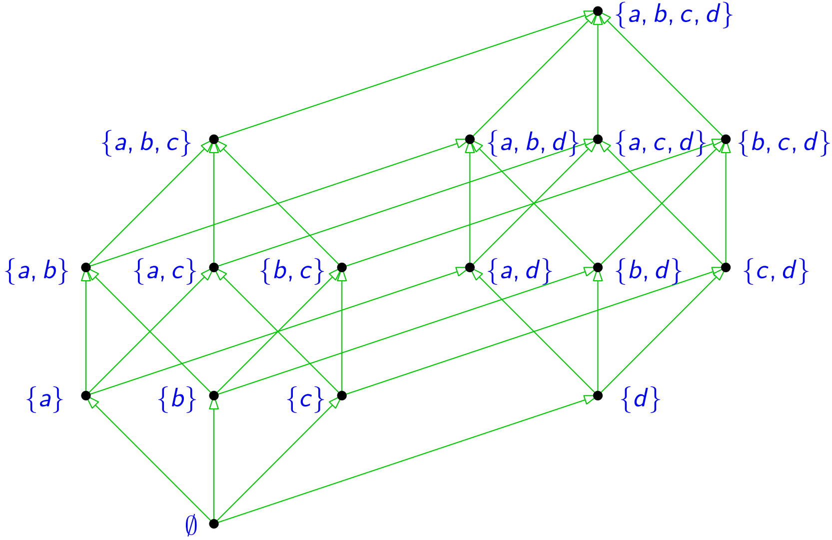


- *Lexikografické* (slovníkové) uspořádání $\leq_{\text{Lex}}$ posloupností:
  $(a_1, \ldots, a_n) \leq_{\text{Lex}} (b_1, \ldots, b_m) \Leftrightarrow$
  $\exists k \geq 0 : (a_1, \ldots, a_k) = (b_1, \ldots, b_k) \wedge (k = n \vee a_{k+1} < b_{k+1})$

  Např.: kánoe $\leq_{\text{Lex}}$ kolo $\leq_{\text{Lex}}$ loď $\leq_{\text{Lex}}$ vlak $\leq_{\text{Lex}}$ vlaky

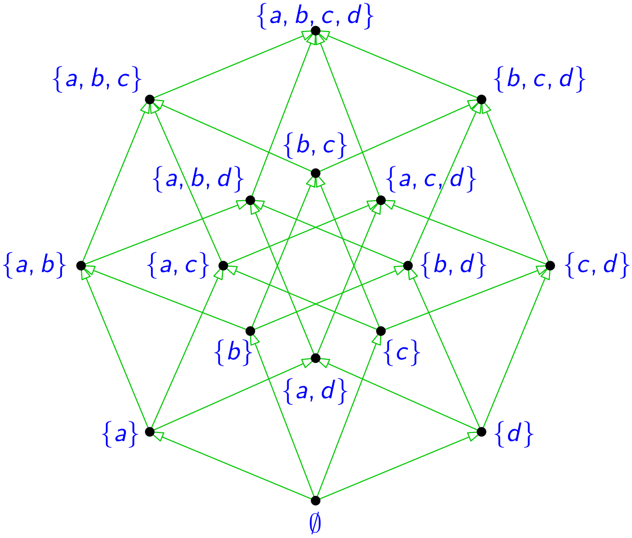
Uspořádání inkluzí $\subseteq$

Uspořádání „být podmnožinou“ na $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$:



Uspořádání inkluzí $\subseteq$, jiný diagram téhož uspořádání

Uspořádání „být podmnožinou“ na $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$:



Lineární uspořádání

Definice: Prvky x a y jsou v $\preceq$ *porovnatelné*, pokud $x \preceq y \vee y \preceq x$.

Definice: *Lineární* uspořádání má každé dva prvky porovnatelné.

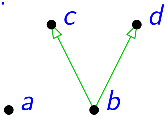
Ukázky lineárních (též tzv. *úplných*) uspořádání:

- Uspořádání čísel: $\leq$ na $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{R}$ (nikoli na $\mathbb{C}$!),
- Lexikografické uspořádání $\leq_{\text{Lex}}$.

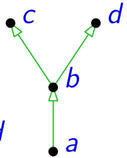
Věta: Každé částečné uspořádání na konečné množině lze rozšířit na lineární uspořádání (doplněním dvojic do relace).

Postup: Dokud jsou v uspořádání nějaké prvky x a y neporovnatelné, doplníme do relace např. dvojici $x \preceq y$ a všechny následné vztahy vyplývající z tranzitivity.

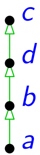
Ukázka:



přidání $a \preceq b$ vyvolá $a \preceq c$ a $a \preceq d$



přidání $d \preceq c$

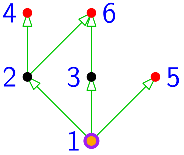


Význačné prvky uspořádání — extrémy

Definice: *Největší* prvek uspořádání $(\preceq, X)$ je $x \in X$ splňující $\forall y \in X \colon y \preceq x$. ... všechny prvky X jsou „menší nebo rovny“ x.
Podobně, x je *nejmenší* prvek $(\preceq, X)$, pokud $\forall y \in X \colon x \preceq y$.

Definice: *Maximální* prvek uspořádání $(\preceq, X)$ je $x \in X$ splňující $\forall y \in X \colon x \preceq y \Rightarrow x = y$. ... žádný jiný prvek není „větší než“ x.
Též x je *minimální* prvek $(\preceq, X)$, pokud $\forall y \in X \colon y \preceq x \Rightarrow x = y$.

Ukázka:



Uspořádání dělitelností $|$ na $\{1, \dots, 6\}$

Uspořádání nemá žádný největší prvek.

Maximální prvky jsou 4, 5 a 6.

Prvek 1 je nejmenší a jediný minimální.

Pozorování:

- Největší může být nejvýše jeden, maximálních může být více.
- Existuje-li největší prvek, je zároveň jediný maximální.
- Maximální prvky jsou navzájem neporovnatelné.
- Konečné uspořádání má alespoň jeden maximální prvek.

... analogicky pro nejmenší a minimální prvky.

Ukázky — linearita uspořádání a existence extrémů

	lineární	největší	nejmenší	maxim.	minim.
$\leq$ na $\{1,\dots,6\}$	✔	✔	✔	✔	✔
$\leq$ na $\mathbb{Z}^+$	✔	✘	✔	✘	✔
$\leq$ na $\mathbb{Z}$	✔	✘	✘	✘	✘
$\mid$ na $\{1,\dots,6\}$	✘	✘	✔	✔	✔
$\mid$ na $\{2,\dots,6\}$	✘	✘	✘	✔	✔
$\mid$ na $\mathbb{Z}^+$	✘	✘	✔	✘	✔
$\mid$ na $\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$	✘	✘	✘	✘	✔
$\subseteq$ na $\mathcal{P}(X)^*$	✘	✔	✔	✔	✔
$\leq_{\mathsf{Lex}}$, X konečná	✔	✔	✔	✔	✔
$\mathsf{id}_X{}^*$	✘	✘	✘	✔	✔

* Pro $|X| > 1$, jinak uspořádání je lineární. X může být i nekonečná.

Inverzní uspořádání

Relace „vetší než“ je inverzní k relaci „menší než“, podobně jsou navzájem inverzní „být dělitelem“ a „být násobkem“ nebo „být potomkem“ a „být předkem“.

Pozorování: Inverzní relace k částečnému uspořádání je opět částečné uspořádání. Nazývá se *obrácené* uspořádání a často se pro něj používá stejný relační symbol, jen svisle převrácený $\geq$, $\supseteq$, $\succeq$.

- Odpovídá otočení šipek v grafu relace.
- Hasseův diagram třeba ještě obrátit vzhůru nohama.

Zaměníme-li částečné uspořádání $\preceq$ za jeho inverzi $\succeq$, pak:

- Z největších prvků jsou nejmenší a obráceně.
- Z maximálních prvků jsou minimální a obráceně.

Obecná tvrzení stačí odvodit jen pro největší a maximální prvky, a pak se lze u nejmeších a minimálních odvolat na inverzní relaci.

Množiny (ne)porovnatelných prvků

Definice: *Řetězec* je podmnožina vzájemně porovnatelných prvků.
... $Y \subseteq X$ tvoří lineární uspořádání uvnitř daného $(\preceq, X)$.

Definice: Podmnožina neporovnatelných prvků je *nezávislá*.

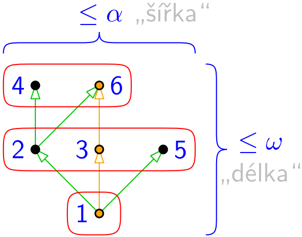
Ukázky: V uspořádání $\mathbb{Z}^+$ dělitelností tvoří mocniny dvou řetězec.
Množina prvočísel je v tomto uspořádání nezávislá.
Množiny stejné konečné velikosti jsou nezávislé v $(\subseteq, \mathcal{P}(X))$.
Každá jednoprvková množina je nezávislá i řetězec zároveň.

Věta: Má-li částečné uspořádání na *konečné* X řetězce velikosti nejvýše ω a nezávislé velikosti nejvýše α, potom platí $|X| \leq \alpha\omega$.

Neformální důkaz:

Odebíráme množiny nejmenších prvků:

- vždy odebereme nezávislou množinu
- vždy o 1 zkrátíme nejdelší řetězce
- postupně odebereme všechny prvky



Kvíz

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Mezi částečná uspořádání na $X = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ patří:
   a) uspořádání po složkách: $(a,b) \preceq (c,d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$,
   b) $(a,b) \preceq (c,d) \Leftrightarrow a \leq c \vee b \leq d$, c) $\ldots \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \geq d$.
2. Kolik prvků má nejdelší řetězec v uspořádání $(|, \{1,\ldots,n\})$?
   a) 1 b) $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ c) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ d) $\left\lfloor \frac{n}{\log_2 n} \right\rfloor + 1$ e) $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$
3. Pokud je prvek x minimální a maximální zároveň v $(\preceq, X)$, pak
   a) uspořádání má jen tento prvek a žádné jiné, čili $X = \{x\}$,
   b) prvek x je zároveň největší i nejmenší,
   c) prvek x je neporovnatelný s ostatními,
   d) X je celá nezávislá, čili $\preceq = \mathrm{id}_X$.
4. Pravda nebo lež?
   Sjednocení uspořádání $\preceq$ s jeho inverzí $\succeq$ dává ekvivalenci.
5. Pravda nebo lež? Řetězce v $\preceq$ jsou nezávislé v $\succeq$ a obráceně.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Existuje uspořádání s právě jedním maximálním prvkem?
- Jak se pozorování o inverzním uspořádání odvodí z axiomů?
- Proč je ve větě nutný předpoklad konečnosti X?
- Lze nějak efektivně prokázat, že řetězec je nejdelší?
  (Lépe než hrubou silou, výpisem všech řetězců.)
  Lze to i analogicky pro nezávislé množiny?

Poznámky k pojmosloví a značení

Přívlastek „částečné“ se používá, je-li třeba naznačit, že prvky mohou, ale nemusejí být neporovnatelné.
Lineární, čili úplné uspořádání je zvláštním případem částečného.
Je-li kontext zřejmý, lze přívlastky vynechávat.

Ostré uspořádání není reflexivní ale místo toho je *ireflexivní*.

Reflexivní a tranzitivní relace je *předuspořádání*.
Může v sobě obsahovat relaci ekvivalence. Mezi třídami největší obsažené relace ekvivalence lze pak odvodit částečné uspořádání.

Hrany Hasseova diagramu spojují prvek s jeho *bezprostředními předchůci* a *bezprostředními následníky*.

V angličtině se maximální prvek nazývá *a maximal element*, zatímco největší prvek je *the maximum*, řidčeji *the largest element*.

Poslední tvrzení zlidovělo coby „Věta o dlouhém a širokém“.