

Ekvivalence

... je druhem relace, která vyjdařuje nějaký rys stejnosti.
Rozdělí množinu na skupiny shodných či podobných prvků.

Ukázky

- ▶ vztah mezi sourozenci (v obvyklých případech)
- ▶ vztah „patřit do stejného kraje“ na množině měst,
- ▶ rozdělení českých slov na skupiny podle prvního písmene,
- ▶ rozdělení slov na skupiny podle počtu slabik,
- ▶ rozdělení počítačů v síti na nepřekrývající se subnety,
- ▶ vztah „mít stejnou hodnotu funkce \cos “ na reálných číslech.

Definice: Relace R na množině X se nazývá *ekvivalence*, pokud je:

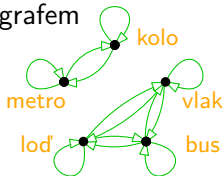
- ▶ reflexivní: $\forall x \in X : xRx$... každé x je v R samo se sebou
- ▶ symetrická: $xRy \Rightarrow yRx$... vztah je „oboustranný“
- ▶ tranzitivní $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$... vztah se „přenášší dál“

Ukázky ekvivalencí

Ekvivalence je reflexivní, symetrická a tranzitivní relace.

- ▶ „Sourozenectví“ na množině Lucemburků $X = \{j, k, v, z\}$ je ekvivalence $R_1 = \{(j, j), (k, k), (v, v), (z, z), (v, z), (z, v)\}$.¹
- ▶ Relaci R_2 „mít stejně slabik“ na $\{\text{kolo, vlak, bus, loď, metro}\}$ lze znázornit např.

grafem



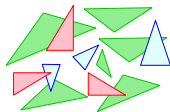
maticí

	k	v	b	m	l
kolo	1	1	1	0	0
vlak	1	1	1	0	0
bus	1	1	1	0	0
metro	0	0	0	1	1
loď	0	0	0	1	1

jiné pořadí prvků
rozdělí matici na bloky

	k	m	v	b	l
kolo	1	0	0	0	0
metro	0	1	0	0	0
vlak	0	0	1	1	0
bus	0	0	1	1	0
loď	0	0	0	0	1

- ▶ Relace R_3 mezi podobnými trojúhelníky v rovině. Stejná barva značí dvojice v relaci.



¹ Václav a Zikmund byli jen polorodí bratři, což obecně nemusí být tranzitivní relace.

Matkou Václava byla Anna Svídnická, zatímco Zikmund se narodil Alžbětě Pomořanské.

Třídy ekvivalence

... k prvku přiřadí ty prvky, co jsou s ním ekvivalentní.

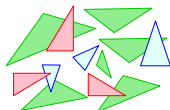
Definice: Je-li R relace ekvivalence na X , pak *třída ekvivalence* určenou $x \in X$ tvoří všechny prvky, které jsou s x ekvivalentní v R . Značí se $[x]_R$. Formálně: $[x]_R = \{y \in X : xRy\}$.

Ukázky:

- ▶ $[\text{kolo}]_{R_2} = \{\text{kolo}, \text{metro}\} = [\text{kolo}]_{R_2}$
 $[\text{vlak}]_{R_2} = \{\text{vlak}, \text{bus}, \text{loď}\} = [\text{bus}]_{R_2} = [\text{loď}]_{R_2}$

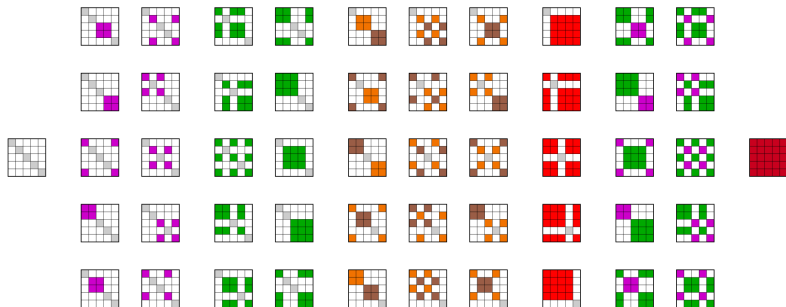
	k	m	v	b	l
kolo	■	■	□	□	□
metro	□	□	□	□	□
vlak	□	□	■	■	■
bus	□	□	■	■	■
loď	□	□	■	■	■

- ▶ $[T]_{R_3}$ tvoří všechny trojúhelníky, které mají stejné tři úhly jako trojúhelník T .
Na délkách stran a pozici v rovině nezáleží.
- ▶ Pro R_4 na \mathbb{R} danou $xR_4y \Leftrightarrow \cos x = \cos y$
 $[x]_{R_4} = \{x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



Obě ekvivalence R_3 a R_4 mají nekonečně mnoho nekonečných tříd.

Různé ekvivalence na pěti prvcích



Třídy ekvivalence jsou vyznačeny různými barvami.

[Obrázek — Wikipedia]

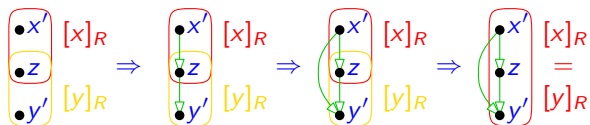
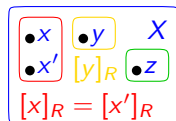
Věta o třídách ekvivalence

Věta: Je-li relace R ekvivalence na množině X ,
 potom třídy ekvivalence určené dvěma prvky
 jsou buď shodné nebo disjunktní:

$$\forall x, y \in X : ([x]_R = [y]_R) \vee ([x]_R \cap [y]_R = \emptyset)$$

Neboli, třídy ekvivalence dělí X na podmnožiny.

... mají-li $[x]_R$ a $[y]_R$ společný prvek z , pak každý prvek x' z $[x]_R$
 je „přes z “ v relaci s každým prvkem y' z $[y]_R$.



Využíváme tranzitivitu: $x'Rz \wedge zRy' \Rightarrow x'Ry'$.

Kvíz

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Relace R daná předpisem $xRy \Leftrightarrow x + y$ je sudé číslo
 - a) není ekvivalence,
 - b) je ekvivalence na množině sudých celých čísel,
 - c) je ekvivalence na množině lichých celých čísel,
 - d) je ekvivalence na množině všech celých čísel.
2. Kolik tříd ekvivalence má relace R na $\{100, \dots, 1000\}$ taková, že $xRy \Leftrightarrow$ čísla x a y se shodují v první a ve třetí cifře?
 - a) 2, b) 9, c) 10, d) 20, e) 81, f) 90, g) 100, h) 200, i) 1000.
3. Pravda nebo lež? Průnik dvou relací ekvivalence na stejné množině je opět ekvivalence.
4. Je-li R ekvivalence na X , potom její doplněk, t.j. $X \times X \setminus R$ je
 - a) reflexivní, b) symetrická, c) antisymetrická, d) tranzitivní.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- ▶ Jak souvisí počet ekvivalencí na n -prvkové množině s rozkladem čísla n na sčítance?
- ▶ Může být třída ekvivalence určená nějakým prvkem prázdná množina?
- ▶ Které vlastnosti ekvivalence byly využity ve větě o třídách ekvivalence, pokud bychom podrobně rozepsali všechny kroky důkazu?
- ▶ Může mít nějaká ekvivalence konečně mnoho nekonečných tříd nebo naopak nekonečně mnoho konečných tříd?

Poznámky k pojmosloví a značení

Ekvivalence se často značí symboly podobnými znaku pro rovnost, jako např. \sim a \equiv .

Termín „být ekvivalentní“ se v matematice používá i pro výroky. Říká se, že výroky V a W ekvivalentní, pokud se z V dá odvodit W a naopak.