Relace

... *vztah* mezi dvěma objekty, přesněji jde o tzv. *binární* relace.
(Viz angl. *relationship*, a v informatice *relační databáze*.)

Ukázky:

- příbuzenské vzahy — např. že Zeus a Héra jsou manželé,
- nebo zdali je r rodičem d,
- zdali má student s zapsaný kurs k,
- zdali mají studenti s a t zapsanou diskrétní matematiku,
- zdali má podnik p pobočku ve městě m,
- zdali město m leží v kraji k,
- zdali byl paket p odeslán z adresy a,
- zdali je číslo a celočíselným násobkem čísla b ...

Vztah nemusí být symetrický: 2 jsou násobkem 1, ale ne naopak!

Relace

… *vztah* mezi dvěma objekty, přesněji jde o tzv. *binární* relace.
(Viz angl. *relationship*, a v informatice *relační databáze*.)

Co je třeba o relaci znát?

- jakých všech objektů se relace může týkat
  … dvě množiny X a Y (ne nutně různé),
  X pro objekty na prvním místě a Y pro druhé.
- mezi kterými objekty vztah skutečně je
  … nějaký popis, které dvojice jsou v relaci a které nikoli.

Definice: *Kartézský součin* množin X a Y je množina $X \times Y = \{(x, y) \colon x \in X, y \in Y\}$, čili množina *všech uspořádaných* dvojic.

Jakákoli $R \subseteq X \times Y$ se nazývá *relace mezi množinami* X a Y.
Jde tedy o podmnožinu *vybraných* dvojic ze součinu $X \times Y$.

Pokud $R \subseteq X \times X$ hovoříme o *relaci na množině* X.

Je vhodné uvádět nosné množiny relace, např. $(R; X, Y)$ a $(R; X)$.

Ukázky relací

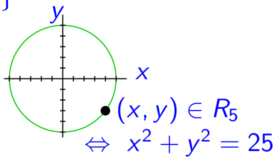



- Pro $X = \{\mathrm{j}, \mathrm{k}, \mathrm{v}, \mathrm{z}\}$ ... dynastie Lucemburků, je vztah „být rodičem“ relací $R_1 = \{(\mathrm{j}, \mathrm{k}), (\mathrm{k}, \mathrm{v}), (\mathrm{k}, \mathrm{z})\}$ na X.
  ... zde relaci popisujeme *výčtem dvojic*

- $X = \{0, \dots, 5\}$, $R_2 = \{(x, y) \colon x \leq y\}$
- $X = \{0, \dots, 5\}$, $R_3 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 25\}$
  ... dvě různé relace na téže množině X popsané *vlastností*

- $X = \{1, \dots, 4\}$, $Y = \{3, \dots, 7\}$, $R_4 = \{(x, y) \colon 3 | (x + 2y)\}$
  ... relace mezi různými množinami X a Y

- $X = \mathbb{R}$, $R_5 = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 = 25\}$
  ... relace na nekonečné množině,
  zde na reálných číslech



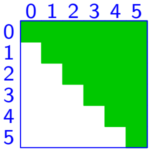
Reprezentace relací tabulkou (maticí) a grafy

Jeden rozměr odpovídá prvkům X, druhý prvkům Y.
Vztah $(x, y) \in R$ vyznačíme např. ✔, 1 nebo vybarvením
když $(x, y) \notin R$, zapíšeme ✘, 0 nebo necháme pole prázdné apod.

Ukázka: Relace $R_2 = \{(x, y) \colon x \leq y\}$ na $X = \{0, \dots, 5\}$:

	0	1	2	3	4	5
0	✔	✔	✔	✔	✔	✔
1	✘	✔	✔	✔	✔	✔
2	✘	✘	✔	✔	✔	✔
3	✘	✘	✘	✔	✔	✔
4	✘	✘	✘	✘	✔	✔
5	✘	✘	✘	✘	✘	✔

nebo

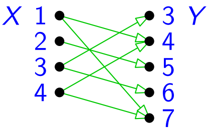


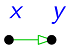
nebo $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

y y

x ✔ $\Leftrightarrow$ x ■ $\Leftrightarrow$ $m_{xy} = 1 \Leftrightarrow (x, y) \in R_2 \Leftrightarrow x \leq y$

Bipartitním grafem: Zakreslíme prvky X a Y, a dvojice $(x, y) \in R$ spojíme (orientovanou) *hranou*.

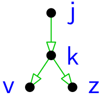


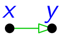


$\Leftrightarrow (x, y) \in R_4$

$\Leftrightarrow 3 | (x + 2y)$

Je-li R na X, stačí X zakreslit jen jednou. Orientace hrany je pak nutná pro odlišení prvního a druhého prvku ve dvojici.





$\Leftrightarrow$

$(x, y) \in R_1$

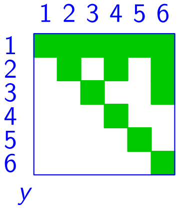
Pět pohledů na jednu relaci na množině

Relaci R_6 dělitelnosti na množině $X = \{1, \ldots, 6\}$ lze popsat:

Vlastností: $R_6 = \{(x, y) : x | y\}$

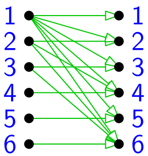
Výčtem prvků
$R_6 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),$
$(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

Tabulkou



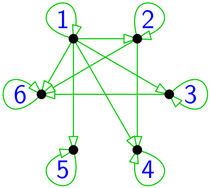
x ■ $\Leftrightarrow (x, y) \in R_6$

Bipartitním grafem



$x \to y \Leftrightarrow (x, y) \in R_6$

Grafem na X

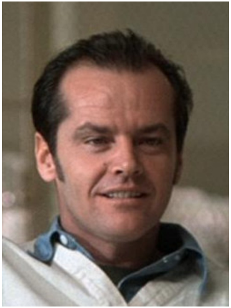


$x \to y \Leftrightarrow (x, y) \in R_6$

Ještě jeden příklad relace ze sociálních sítí

Definujme relaci R_7 na množině „lidí od filmu“ X tak, že $(x, y) \in R_7$, právě když x *režíroval alespoň jeden film, kde hraje* y.

Omezíme množinu X jen na Miloše Formana, Jacka Nicholsona a Edwarda Nortona, neboli $X = \{\mathrm{m}, \mathrm{j}, \mathrm{e}\}$.


Možná vyjádření relace

Výčtem dvojic: $R_7 = \{(\mathrm{m}, \mathrm{j}), (\mathrm{m}, \mathrm{e}), (\mathrm{j}, \mathrm{j}), (\mathrm{e}, \mathrm{m}), (\mathrm{e}, \mathrm{e})\}$

Prvky kartézského součinu:

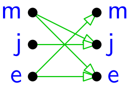
	m	j	e
m	~~(m, m)~~	(m, j)	(m, e)
j	~~(j, m)~~	(j, j)	~~(j, e)~~
e	(e, m)	~~(e, j)~~	(e, e)

	m	j	e
m	✗	✓	✓
j	✗	✓	✗
e	✓	✗	✓

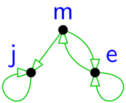
Maticí:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bipartitním grafem:



Grafem na X:

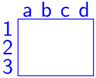


(m, j) . . . Přelet nad kukaččím hnízdem, (m, e) . . . Lid versus Larry Flynt, (j, j) . . . Dva Jakeové,
(e, m) a (e, e) . . . Rabín, kněz a krásná blondýna

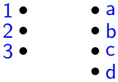
Tři speciální relace

Prázdná relace mezi libovolnými množinami X a Y
je dána prázdnou množinou, neboli je to relace $(\emptyset; X, Y)$.

Odpovídá prázdné tabulce
a grafům beze hran.

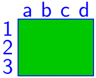


$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

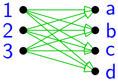


Univerzální relace mezi X a Y je $(X \times Y; X, Y)$.
Obsahuje všechny možné dvojice.

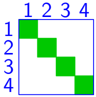
Odpovídá zcela plné tabulce
a grafům se všemi hranami.



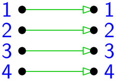
$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

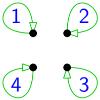


Na každé množině X je relace *rovnosti* zvaná též *identická* relace.
Označíme si ji $\mathrm{id}_X = \{(x, x) : x \in X\}$. Platí $x = y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{id}_X$.
Její matice má na diagonále 1 a mimo 0, a nazývá se *jednotková*.



$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





Značení: Namísto $(x, y) \in R$ budeme psát stručněji xRy.
Jen pro $x = y$ budeme používat $(x, y) \in \mathrm{id}_X$ a nikoli $(x, y) \in =$.

Inverzní relace

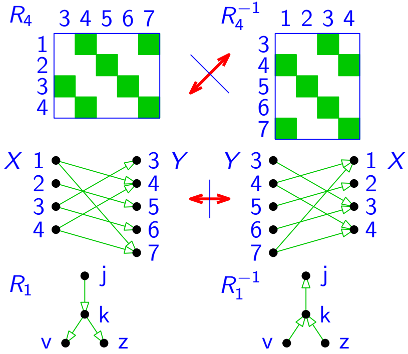
Otázka: Jak spolu souvisejí relace „být rodičem“ a „být dítětem“; „být menší“ a „být větší“; „být násobkem“ a „být dělitelem“?

Tyto páry relací popisují vztah mezi stejnými dvojicemi objektů, ale v obráceném pořadí. Čili je-li v jedné (x, y), je v druhé (y, x).

Definice: Je-li R relace mezi množinami X a Y, pak relace k ní *inverzní* je $(R^{-1}; Y, X)$ definovaná $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

Inverzní relaci R^{-1} získáme z R:

- záměnou řádků za sloupce v tabulce/matici relace (tzv. transpozicí matice)
- záměnou stran (a orientací) v bipartitním grafu
- u relací na množině obrácením směru šipek v orientovaném grafu na X



Skládání relací

Otázka: Lze z jednodušších relací odvodit složitější,
jako např. „být prarodičem, strýcem/tetou, ...“
z jednodušších „být rodičem, sourozencem, ...“?

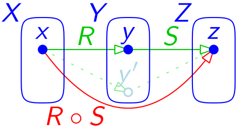
Lze z relací mezi „podniky a městy“ a „městy a kraji“ odvodit,
ve kterých krajích mají podniky své pobočky?

... odpovídá operaci JOIN v databázích

Lze z relací „být větší“ a „být druhou mocninou“
odvodit relaci „být větší než druhá mocnina“?

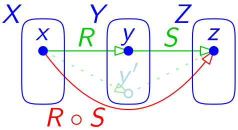
Pro vztah mezi prvky x a z musíme najít *„prostřední“* prvek y,
který je ve správných (ne nutně stejných) vztazích s oběma:
prarodič — *rodič* — dítě; strýc — *rodič* — dítě;
podnik — *město* – kraj; x je větší než y, což je druhá mocnina z.

Definice: *Složení* relací $(R; X, Y)$ a $(S; Y, Z)$
je relace $(R \circ S; X, Z)$ definovaná
$R \circ S = \{(x, z) : \exists y : xRy \wedge ySz\}$.



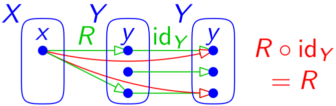
Skládání relací

Definice: *Složení* relací $(R; X, Y)$ a $(S; Y, Z)$ je relace $(R \circ S; X, Z)$ definovaná $R \circ S = \{(x, z) : \exists y : xRy \wedge ySz\}$.

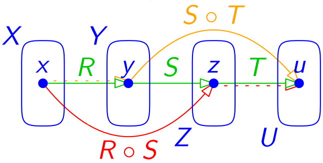


Pozorování:

- Pro $(R; X, Y)$ platí: $R \circ \mathrm{id}_Y = R$ a $\mathrm{id}_X \circ R = R$



- Skládání relací je asociativní: $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

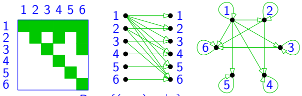


- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ Pozor, to není totéž co $R^{-1} \circ S^{-1}$. Inverzní relace ani nemusejí jít složit v pořadí $R^{-1} \circ S^{-1}$!

Vlastnosti relací na množině

Definice: Relace R na X je *reflexivní*, pokud obsahuje všechny dvojice (x, x) pro $x \in X$. Formálně: $\forall x \in X\colon (x, x) \in R$. Lze též psát, že reflexivní R splňuje $\mathrm{id}_X \subseteq R$.

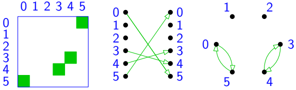
Ukázka: Relace R_6 je reflexivní, protože matice má vyplněnou diagonálu, bipartitní graf má vodorovné párování a orientovaný graf má na všech vrcholech smyčku.



$R_6 = \{(x, y)\colon x|y\}$

Definice: Relace R je *symetrická*, pokud s každou dvojicí má i dvojici v obráceném pořadí. Formálně: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$. Lze též psát, že symetrická R splňuje $R = R^{-1}$.

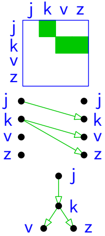
Ukázka: Relace R_3 je symetrická, protože její matice je souměrná podle diagonály, bipartitní graf je svisle souměrný a orientovaný graf má dvojice hran v obou směrech.



$R_3 = \{(x, y)\colon x^2 + y^2 = 25\}$

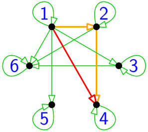
Vlastnosti relací na množině

Definice: Relace R je *antisymetrická*, když různé prvky tvoří nejvýše jednu z dvojic relace. Formálně: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$.
Lze též psát, že antisymetrická R splňuje $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_X$.



Ukázka: Relace R_1 je antisymetrická, protože matice nemá vyplněná dvě místa symetricky podle diagonály, bipartitní graf nemá dvojici svisle souměrných hran a orientovaný graf nemá žádnou dvojici hran v obou směrech.

Definice: Relace R je *tranzitivní*, pokud je uzavřená na skládání.
Formálně: $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.
Lze též psát, že tranzitivní R splňuje $R \circ R \subseteq R$.



Ukázka: Relace R_6 je tranzitivní, protože v orientovaném grafu dávají dvě navazující hrany vždy hranu.
Matice ani bipartitní grafy tranzitivitu příliš nenaznačí.

Ukázky vlastností vybraných relací

- Prázdná relace $\emptyset$ na libovolné neprázdné množině X
- Identita id_X (rovnost) na libovolné množině X
- Neostré porovnání $\leq$ reálných čísel podle velikosti
- Dělitelnost na $\mathbb{N}^+$
- Soudělnost $(R; \mathbb{N}^+)$: $xRy \Leftrightarrow \mathrm{nsd}(x, y) > 1$
- Rovnoběžnost na přímkách v rovině
- Ostré porovnání $<$ na množině reálných funkcí $\mathbb{R}[x]$:
  $f < g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) < g(x)$
- Relace na českých slovech: $(s, t) \in R \Leftrightarrow s$ je přesmyčkou t,
  např. $(\mathrm{tulak}, \mathrm{utkal}), (\mathrm{utkal}, \mathrm{latku}) \in R$
- Relace „být rodičem“ na neprázdné množině osob

Ukázky vlastností vybraných relací

	reflexivní	symetrická	antisym.	tranzitivní
$\emptyset$ na neprázdné X	✘	✔	✔	✔
id_X	✔	✔	✔	✔
$\leq$ na $\mathbb{R}$	✔	✘	✔	✔
dělitelnost	✔	✘	✔	✔
soudělnost	✘	✔	✘	✘
rovnoběžnost	✔	✔	✘	✔
$<$ na $\mathbb{R}[x]$	✘	✘	✔	✔
přesmyčky slov	✔	✔	✘	✔
„být rodičem“	✘	✘	✔	✘

... tabulka udává relaci mezi relacemi a jejich vlastnostmi ☺

Kvíz

Je-li u některých otázek více možností správných, vyberte všechny.

1. Pokud tabulku relace R na X otočíme dvakrát o 90° po směru hodinových ručiček, dostaneme
   a) id_X b) R^{-1} c) R d) R^2 e) R^{-2} neboli $R^{-1} \circ R^{-1}$
2. Jsou-li R relace „být dítětem“ a S „být sourozenci“, pak v relaci $R \circ S \circ R^{-1}$ jsou a) bratři a sestry, b) bratranci a sestřenice, c) tety a strýci, d) neteře a synovci, e) rodiče co mají spolu alespoň dvě děti, f) jiní příbuzní.
3. Na množině studentů je relace „mít spolu zapsanou DM“
   a) reflexivní, b) symetrická, c) antisymetrická, d) tranzitivní.
4. Pravda nebo lež? Jsou-li R a S tranzitivní relace na X, potom relace $R \circ S$ je také tranzitivní.
5. Pravda nebo lež? Jsou-li R a S symetrické relace na X, potom relace $R \circ S$ je také symetrická.

Otázky k porozumění tématu přednášky

- Je pro množinu bodů vztah „ležet na téže přímce“ relací?
- Platí pro skládání celočíselných „mocnin“ relací pravidlo pro součet exponentů, čili $R^m \circ R^n = R^{m+n}$?
  Zde nulový exponent dává id, pro kladné n je
  $R^n = \underbrace{R \circ R \circ \cdots \circ R}_{n\times}$ a pro záporné podobně skládáme R^{-1}.
- Platí ekvivalence $R = S \iff R \circ T = S \circ T$ pro libovolné relace R, S a T na X? Pokud ne, jaké vlastnosti musí T mít, aby ekvivalence platila pro všechna R a S na X?
- Které vlastnosti relací (reflexivita,...) se zachovávají při operacích s relacemi jako jsou invertování a skládání?

Poznámky k pojmosloví a značení

Někdy je pořadí složek ve značení relace opačné a namísto oblých závorek jsou hranaté, čili namísto $(R; X, Y)$ lze vídat (X, Y, R), $[R; X, Y]$, apod. [Wikipedie, Bartsch]

Vztah xRy bývá značen i $(x\ R\ y)$.

Bipartitní graf nemusí být orientovaný, je-li jasné, která strana odpovídá prvním složkám (často levá) a která druhým (pravá).

Identita id_X se nazývá také *diagonální relace* a značí se Δ_X.

Inverzní relace R^{-1} se značí i R^{T}, což souvisí s transpozicí matice relace. [Wikipedie]

Odlišujme univerzální relaci od podobně znějících, ale jinak definovaných pojmů (úplná, totální). [Wikipedie, Bartsch]