Topologické metody v kombinatorice[1] — 5. série
Mnohostěnové komplexy, komplexy arborescencí

zadáno 16. 5. 2019, odevzdat do 24. 6. 2019

Definice. (Geometrický) mnohostěnový komplex *je soubor mnohostěnů* $\mathsf{M} = \{M_1, \ldots, M_k\}$, *kde každý* M_i *je omezený mnohostěn v* $\mathbb{R}^d$ *pro nějaké* d, *který dále splňuje.*

1. *Je-li* $M \in \mathsf{M}$ *a* F *stěna* M, *potom* $F \in \mathsf{M}$.
2. *Jsou-li* $M_1, M_2 \in \mathsf{M}$, *potom* $M_1 \cap M_2$ *je stěna* M_1 *i* M_2.

Polyédrem *mnohostěnového komplexu* M *rozumíme množinu* $|\mathsf{M}| := \bigcup P$. Množinou vrcholů $V(\mathsf{M})$ *rozumíme sjednocení množin vrcholů všech mnohostěnů z* M.

Definice (Komplex arborescencí)**.** Arborescence *je orientovaný strom zakořeněný v kořeni* r *takový, že z kořene* r *do libovolného dalšího vrcholu vede právě jedna orientovaná cesta. Je-li* G *orientovaný graf (bez smyček a bez násobných hran ve stejném směru) a* $r \in V(G)$, *definujeme komplex arborescencí* $\mathsf{K} = \mathsf{K}(G, r)$ *následujícím způsobem:*

V celé definici uvažujeme pouze arborescence zakořeněné v r. *Je-li* A *arborescence v* G, *která je kostrou* G, *potom ji ztotožníme s bodem v* $\mathbb{R}^{E(G)}$, *který má hodnotu* 1 *v souřadnicích odpovídajících hranám* A, *a hodnotu* 0 *v ostatních souřadnicích.*

Je-li A *nyní libovolná arborescence v* G, *nechť* $x_1, \ldots, x_t$ *jsou vrcholy* G *nepatřící do* A. *Dále mějme alespoň dvojprvkové množiny* $N_1, \ldots, N_t \subseteq E(G)$ *takové, že každá hrana z* N_i *vede z nějakého vrcholu* A *do* x_i. *Potom definujeme mnohostěn* $C(A; N_1, \ldots, N_t)$ *jako konvexní obal všech arborescencí vzniknuvších z* A *přidáním právě jedné hrany z každého* N_i. *Nakonec* $\mathsf{K}(G, r)$ *je soubor mnohostěnů* $C(A; N_1, \ldots, N_t)$ *jako výše.*

Příklad 1. *Nechť* M *je mnohostěnový komplex. Dokažte, že existuje simpliciální podrozdělení* K *komplexu* M, *které nevyužívá žádné nové vrcholy. Tj., ukažte, že existuje geometrický simpliciální komplex* K, *že* $V(\mathsf{K}) = V(\mathsf{M})$, $|\mathsf{K}| = |\mathsf{M}|$ *a pro každý simplex* $\sigma \in \mathsf{K}$ *existuje* $M \in \mathsf{M}$, *že* $\sigma \subseteq M$.

Hint: Řekneme, že podrozdělení K *je* kuželovité, *pokud pro každé* $M \in \mathsf{M}$ *existuje vrchol* $v(M) \in M$, *že* $v(M)$ *je obsažený v každém maximálním (relativně uvnitř* M*) simplexu* K *podrozdělujícím* M. *Najděte kuželovité podrozdělení.* **[3]**

Příklad 2. *Rozhodněte zda platí: Pro každé* $d \geq 1$, *každé dvě simpliciální podrozdělení krychle* $[0,1]^d$ *(pojaté jako mnohostěnový komplex složený ze všech stěn krychle), která nevyužívají žádné nové vrcholy, mají stejný počet* d*-simplexů.* **[2]**

Příklad 3. *Pořádně dokažte, že komplex arborescencí* $\mathsf{K}(G, r)$ *je mnohostěnový komplex.* **[3]**

Příklad 4. *Nechť* k, n *jsou přirozená čísla a* $Y_1, \ldots, Y_n \subseteq [k]$. *O funkci* $\psi \colon [n] \to [k]$ *řekneme, že je* selektor *pokud* $\psi(i) \in Y_i$ *pro každé* $i \in [n]$. *Pro každý selektor* ψ *definujeme mřížový bod* $z(\psi) \in \mathbb{Z}^k$ *pomocí* $z(\psi) := (|\psi^{-1}(1)|, \ldots, |\psi^{-1}(k)|)$. *(Zde* $|\cdot|$ *značí velikost množiny.)*

Mějme selektory $\psi_1, \ldots, \psi_t$ *a mřížový bod* $z \in \mathbb{Z}^k \cap \operatorname{conv}(z(\psi_1), \ldots, z(\psi_t))$. *Dokažte, že existuje selektor* ψ, *že* $z = z(\psi)$.

Hint: Je-li $z \in \operatorname{conv}(z(\psi_1), \ldots, z(\psi_k))$,[2] *a* $z \neq z(\psi_1)$, *najděte* ψ_1', *že* $\|z - z(\psi_1')\|_1 < \|z - z(\psi_1)\|_1$, *kde* $\|\cdot\|_1$ *značí* ℓ_1*-normu. (Tudy vede jedno možné řešení, ale možná přijdete na lepší.)* **[5+nápov]**

Nápověda k tomuto příkladu je na vyžádání.

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/˜balko/

[2] k místo t v $z(\psi_k)$ není překlep, ale součást hintu.