Topologické metody v kombinatorice[1] — 4. série
Věta o sendviči, Tverbergova věta, stupeň zobrazení a Tuckerovo lemma

zadáno 17.4.2019, odevzdat do 15.5.2019

V příkladech, kde neplyne ze zadání jinak, můžete používat libovolnou verzi Borsukovy–Ulamovy (či Ljusternikovy–Šnireľmanovy) věty, která byla ukázána na přednášce. Můžete také používat Blagojević–Matschke–Zieglerovu větu.

Příklad 1. *Věta o sendviči říká, že pro disjunktní konečné množiny bodů $A_1, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ existuje nadrovina h taková, že každý jí určený otevřený poloprostor obsahuje nanejvýš $\left\lfloor \frac{|A|}{2} \right\rfloor$ bodů z A.*

Ukažte, že nahradíme-li původní definici půlení přirozenějším zněním: nadrovina h půlí $A \subset R^d$, pokud $|h^+ \cap A| + \frac{1}{2}|h \cap A| = \frac{1}{2}|A|$, kde h^+ je jeden z otevřených poloprostorů určených h, tak potom existují dvě konečné množiny bodů v rovině, které nelze rozpůlit. **[2]**

Příklad 2. *Dokažte, že každá množina X sedmi bodů v rovině má alespoň dvě různá Tverbergova 3-dělení. Tedy body z X lze alespoň dvěma různými způsoby rozdělit do tří množin jejichž konvexní obaly mají neprázdný průnik.* **[2]**

Příklad 3. *Nechť X je množina 11 bodů v rovině, čtyři z těchto bodů jsou obarveny červeně, čtyři zeleně a tři modře. Dokažte, že nějaká podmnožina této množiny má duhové Tverbergovo 3-dělení. Tedy v X lze vybrat tři po dvou disjunktní podmnožiny tak, že konvexní obaly těchto podmnožin mají neprázdný průnik a žádná z množin neobsahuje dva body téže barvy.* **[2]**

Příklad 4. *Dokažte, že pro libovolné celé číslo z a přirozené číslo d existují triangulace K_1 a K_2 sféry S^d a simpliciální zobrazení z K_1 do K_2 takové, že $\deg f = z$.* **[3]**

Příklad 5. *Nechť K je simpliciální komplex, který vznikne následujícím způsobem. Uvažme k šachovnic, kdy každá šachovnice má o jeden řádek víc, než je počet jejích sloupců. (Různé šachovnice ale mohou mít různé velikosti.) Vrcholy K jsou možná umístění jedné věže na některou z šachovnic. Simplexy K jsou kolekce věží (jakožto vrcholů K), které se navzájem neohrožují. Dokažte, že K je orientovatelná pseudovarieta.* **[1+3]**

Příklad 6. *Nechť M je množina všech permutací na $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, které sestávají z právě jednoho cyklu délky 5. Pro $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\pi \in M$ definujme $f_i(\pi)$ tak, že si π zapíšeme jako (i, a_1, a_2, a_4, a_3) a potom $f_i(\pi) = (i, a_2, a_1, a_3, a_4)$. Všimneme si, že f_i je involuce. Řekneme, že π a π' jsou* blízké, *pokud $f_i(\pi) = \pi'$ pro nějaké i (to je symetrická relace, protože f_i je involuce). Nechť T je triangulace koule B^3 antipodálně symetrická na hranici. A nechť $\lambda\colon V(T) \to M$ je libovolná funkce splňující $\lambda(v) = (\lambda(-v))^{-1}$, pro každé v z hranice T, kde $(\lambda(v))^{-1}$ značí inverzní permutaci k permutaci $\lambda(v)$. Dokažte, že existuje hrana z T taková, že její koncové vrcholy nejsou zobrazeny na blízké permutace.* **[4+nápov]**

Nápověda k tomuto příkladu bude uvedena **8.5.2019**.

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/