Topologické metody v kombinatorice[1] — 3. série
Borsukova–Ulamova věta

zadáno 27.3.2019, odevzdat do 17.4.2019

V příkladech, kde neplyne ze zadání jinak, můžete používat libovolnou verzi Borsukovy–Ulamovy (či Ljusternikovy–Šnireľmanovy) věty, která byla ukázána na přednášce.

Příklad 1. *Dokažte přímo 1-dimenzionální verzi (LS-o) Ljusternikovy–Šnireľmanovy věty, tj. dokažte, že pro každé pokrytí S^1 dvěma otevřenými množinami existuje dvojice antipodálních bodů obsažená v jedné z množin.* **[2]**

Příklad 2. *Nechť T je torus reprezentovaný jako $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4$*

(a) Nalezněte příklad spojitého $f\colon T \to \mathbb{R}^2$, pro které neexistuje $x \in T$ takové, že $f(x) = f(-x)$. **[2]**

(b) Dokažte, že pro každé spojité $f\colon T \to \mathbb{R}$ existuje $x \in T$ takové, že $f(x) = f(-x)$ **[1]**

Příklad 3. *Ukažte, že následující tvrzení je ekvivalentní s některou verzí Borsukovy–Ulamovy věty: V každém pokrytí sféry S^n množinami $F_1, \dots, F_{n+1}$, z nichž každá je uzavřená nebo otevřená, lze najít jednu množinu F_i obsahující pár antipodálních bodů (tedy $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).* **[3]**

Příklad 4. *Ukažte, že následující tvrzení je ekvivalentní s některou verzí Borsukovy–Ulamovy věty: Nechť $f\colon S^n \to S^n$ je antipodální. Potom každé zobrazení $g\colon S^n \to S^n$ s f homotopické je surjektivní.* **[2+2]**

Příklad 5. *Nechť* $\mathrm{SG}(n,k)$ *označuje* Schrijverův graf, *jehož vrcholy jsou stabilní k-tice prvků z množiny $\{1, \dots, n\}$ a jehož dva vrcholy jsou spojené hranou, jsou-li příslušné k-tice disjunktní.*

(a) Ukažte, že ne v každém grafu $\mathrm{SG}(n,k)$ mají všechny vrcholy stejné stupně. **[2]**

(b) Ukažte, že graf $\mathrm{SG}(n,k)$ je vrcholově kritický. Neboli ukažte, že pro každou k-tici $A \in V(\mathrm{SG}(n,k))$ existuje $(n-2k+2)$-obarvení vrcholů $\mathrm{SG}(n,k)$, které používá barvu $n-2k+2$ jen na vrcholu A. **[4+nápov]**

Řešení druhé části tohoto příkladu je možné odevzdávat do **24.4.2019**. *Nápověda k tomuto příkladu bude uvedena* **17.4.2019**.

[1] Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/