

# Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 8. cvičení\*

12. dubna 2022

## 1 Simplexová metoda o něco podrobněji

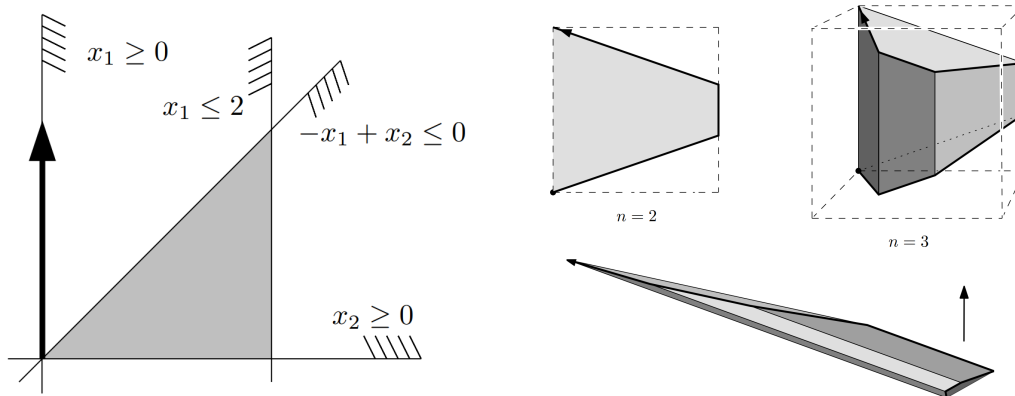
Víme, že simplexová metoda se může zacyklit a pak nikdy neskončí. To nastává pouze v degenerovaném případě a je to jediný způsob, jak metoda může selhat. V praxi toto typicky nenastává a možnost zacyklení se často ignoruje. Jinak se zacyklení dá zabránit volbou vhodného pivotovacího pravidla, poslouží například Blandovo pravidlo.

**Příklady pivotovacích pravidel pro výběr vstupující proměnné  $x_t$  a vystupující  $x_s$ :**

1. *Dantzigovo pravidlo*: Vyber  $t \in N$  s maximálním  $r_t$  a zvol  $x_s$  libovolně z možných proměnných.
2. *Blandovo pravidlo*: Vyber nejmenší možné  $t \in N$  a pro něj nejmenší možné  $s \in B$ . Brání zacyklení, ale je pomalé.

Existuje spousta dalších pivotovacích pravidel (lexikografické, náhodné a další).

**Efektivita simplexové metody:** V praxi funguje velmi efektivně, podle počítačových experimentů u úloh v rovnicovém tvaru s  $m$  omezeními typicky stačí k nalezení optima  $2m$  až  $3m$  pivotovacích kroků. Není známé pivotovací pravidlo, pro které by se umělo ukázat, že simplexová metoda skončí v počtu kroků, který je polynomiální vzhledem k počtu omezení  $m$  a počtu proměnných  $n$ . Naopak pro spousta pivotovacích pravidel existují příklady v rovnicovém tvaru s  $O(n)$  omezeními a  $O(n)$  proměnnými, pro které s určitou počáteční bází potřebuje simplexová metoda  $2^{\Omega(n)}$  pivotovacích kroků. Tyto příklady jsou ovšem vzácné. Existuje pravděpodobnostní pivotovací pravidlo, pro nějž je známo, že simplexová metoda nad každou vstupní úlohou použije nanejvýš  $e^{O(\sqrt{n \ln n})}$  pivotovacích kroků.



Obrázek 1: Degenerovaný program a Mintyho–Kleeovy hyperkrychle (J. Matoušek: Understanding and using linear programming).

**Příklad 1.** Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned} \max x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Dantzigovo pravidlo.

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~ballo/>

**Příklad 2.** Vyřešte simplexovou metodou následující úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned} \max & 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ x_5 &= -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\ x_6 &= -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\ x_7 &= 1 - x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0. \end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Změní se výpočet, pokud bychom používali Dantzigovo pravidlo?

**Příklad 3.** Na následující úlohy lineárního programování aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Zkuste důvodit, proč se algoritmus zastavil.

(a) Optimalizujte funkci  $\max 3x_1 + x_2$  za podmínek

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Po převodu do rovnicového tvaru můžete použít počáteční přípustné bázické řešení s  $x_1 = 3$  a  $x_2 = 4$ .

(b) Optimalizujte funkci  $\max 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$  za podmínek

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 20 \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$