Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 5. cvičení*

22. března 2022

1 Mnohostěny

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0,1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K. *Konvexní mnohostěn* je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P. Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P. Stěny dimenzí 0, 1 a $d-1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*.

Příklad 1. *Dokažte, že množina všech optimálních řešení lineárního programu* $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ *za podmínek* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, *kde* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, *je konvexní množina.*

Příklad 2. *Mějme mnohostěn* $P \subseteq \mathbb{R}^3$ *určený množinou vrcholů*

$$\mathbf{a} = (2,1,6), \quad \mathbf{b} = (0,-5,0), \quad \mathbf{c} = (-2,2,-1), \quad \mathbf{d} = (0,-4,0), \quad \mathbf{e} = (0,1,1).$$

Pro každou z následujících rovin určete, zda je vůči P *tečná, sečná či mimoběžná. Pro tečné roviny určete dimenzi příslušné stěny.*

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 5x + 3y - 2z = 1\}$,

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z = 2\}$,

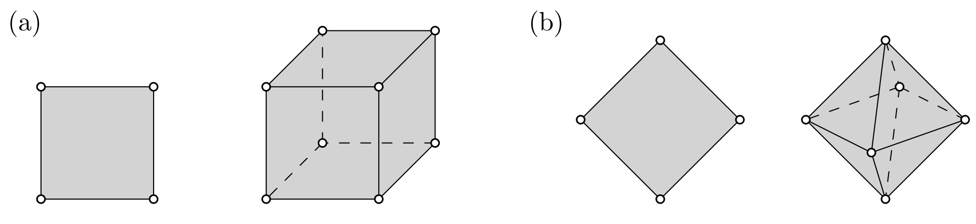
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + z = 0\}$.

Příklad 3. *Počty stěn pro známé mnohostěny v* $\mathbb{R}^d$, *kde* $d \in \mathbb{N}$.

(a) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionální krychle $[0,1]^d$*?*

(b) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionálního křížového mnohostěnu *(neboli zobecněného osmistěnu)*

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \colon |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_d| \leq 1\}?$$



Obrázek 1: Příklady (a) d-dimenzionální krychle a (b) d-dimenzionálního křížového mnohostěnu pro $d = 2, 3$.

Příklad 4. *Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jiné vrcholy neexistují:*

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 3, \\ y + 2z &\leq 2, \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 5. *Mějme mnohostěn* $P = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 1 \;\&\; x \leq 2\}$. *Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).*

Příklad 6. *Nechť* P *je konvexní mnohostěn v* $\mathbb{R}^d$ *a nechť* F *a* G *jsou jeho stěny. Dokažte, že* $F \cap G$ *je stěnou* P.

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ *a* $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$, *kde platí* $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ *a* $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ *pro každé* $\mathbf{x} \in P$. *Uveďte formuli, která stěnu* $F \cap G$ *určuje.*