

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 10. cvičení*

26. dubna 2022

1 Dualita její aplikace

Mějme následující úlohu lineárního programování P s n proměnnými a m podmínkami:

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmíněk } A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{P})$$

Té budeme říkat *primární lineární program* (neboli *primár*). Jeho *duálním lineárním programem* (neboli *duálem*) nazveme následující lineární program D s m proměnnými a n podmínkami:

$$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y} \text{ za podmíněk } A^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c} \text{ a } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{D})$$

Vysvětlení: při řešení P se snažíme najít lineární kombinaci m podmínek soustavy $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ s nějakými koeficienty $y_1, \dots, y_m \geq 0$ takovými, aby výsledná nerovnost měla j -tý koeficient aspoň c_j pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a pravá strana přitom byla co nejmenší.

Ukazuje se, že program D „hlídá“ program P podle následujícího výsledku, ze kterého například vidíme, že je-li P neomezený, pak D nemá přípustné řešení.

Věta 1 (Slabá věta o dualitě). *Pro každé přípustné řešení $\mathbf{x}$ úlohy P a každé přípustné řešení $\mathbf{y}$ úlohy D platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$.*

Následující zesílení je asi nejdůležitějším teoretickým výsledkem o lineárních programech.

Věta 2 (Silná věta o dualitě). *Pro úlohy P a D nastane právě jedna z následujících čtyř možností:*

- (a) Ani P ani D nemá přípustné řešení.
- (b) Úloha P je neomezená a D nemá přípustné řešení.
- (c) Úloha P nemá přípustné řešení a D je neomezená.
- (d) Úlohy P i D mají přípustné řešení. Pak mají i optimální řešení $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ a platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}^*$.

Duální lineární programy můžeme uvážit i pro lineární programy v obecném tvaru, stačí postupovat podle následující tabulky. Postup funguje zleva doprava i zprava doleva.

	Primární úloha	Duální úloha
Proměnné	$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$	$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$
Matice	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$A^\top \in \mathbb{R}^{n \times m}$
Pravá strana	$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$	$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$
Účelová funkce	$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$	$\min \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
Podmínky	i -tá podmínka má $\leq$	$y_i \geq 0$
	$\geq$	$y_i \leq 0$
	$=$	$y_i \in \mathbb{R}$
	$x_j \geq 0$	j -tá podmínka má $\geq$
	$x_j \leq 0$	$\leq$
	$x_j \in \mathbb{R}$	$=$

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 1. Sestrojte duální úlohu k lineární relaxaci úlohy Nalezení minimálního vrcholového pokrytí ve váženém grafu $G = (V, E, w)$, kde $w: V \rightarrow \mathbb{R}^+$. Pro připomenutí, tato relaxace vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \text{Proměnné: } & x_v \geq 0 \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce: } & \min \sum_{v \in V} w(v)x_v \\ \text{Podmínky: } & x_u + x_v \geq 1 \text{ pro každé } \{u, v\} \in E \end{aligned}$$

Jaký problém řeší duální úloha pro jednotkové váhy?

Síť je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf, neboli $E \subseteq V \times V$, z a s jsou dva různé vrcholy grafu G (zvané zdroj a stok) a kapacita $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. Tok v síti je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a

$$\sum_{v: (u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{v: (v,u) \in E} f(v,u)$$

pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. Velikost toku je

$$w(f) = \sum_{v: (z,v) \in E} f(z,v) - \sum_{v: (v,z) \in E} f(v,z).$$

Řezem v síti je množina R hran vedoucích z množiny vrcholů Z do množiny vrcholů $S = V \setminus S$, kde $z \in Z$ a $s \in S$. Kapacitou řezu R je $\sum_{e \in R} c(e)$.

Příklad 2. Uvažme následující úlohu lineárního programování pro problém Nalezení maximálního toku v síti $(G = (V, E), z, s, c)$:

$$\begin{aligned} \text{Proměnné: } & x_e \geq 0 \text{ pro každé } e \in E \\ \text{Účelová funkce: } & \max x_{s,z} \\ \text{Podmínky: } & \sum_{u: (u,v) \in E} x_{u,v} - \sum_{u: (v,u) \in E} x_{v,u} = 0 \text{ pro každé } v \in V \\ & x_e \leq c(e) \text{ pro každé } e \in E \end{aligned}$$

(V tomto programu jsme přidali hranu (s, z) „nekonečně“ velké kapacity, čímž tok cirkuluje a program se tak zjednoduší uvedením podmínek Kirchhoffových zákonů i pro zdroj a stok).

Sestrojte duál této úlohy a (*) nahlédněte, že odpovídá relaxaci úlohy Nalezení řezu minimální kapacity v síti.

Příklad 3. (a) Uvažte následující lineární program pro orientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho vrcholy s a t :

$$\begin{aligned} \text{Proměnné: } & x_v \in \mathbb{R} \text{ pro každé } v \in V \\ \text{Účelová funkce: } & \max x_t \\ \text{Podmínky: } & x_s = 0 \\ & x_v - x_u \leq 1 \text{ pro každé } (u, v) \in E \end{aligned}$$

Nahlédněte, že řeší úlohu Nalezení délky nejkratší cesty mezi vrcholy s a t v G . V účelové funkci je skutečně maximum, i když chceme nalézt nejkratší cestu.

(b) Zkonstruuje duál k předešlé úloze. Jaký problém duál řeší?

Příklad 4. Sestrojte lineární relaxaci úlohy pro problém Nalezení minimálního množinového pokrytí, ve kterém chceme z množinového systému $\mathcal{U} \subseteq 2^{\{1, \dots, m\}}$ vybrat $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ tak, aby $\{1, \dots, m\} \subseteq \bigcup \mathcal{T}$ a $|\mathcal{T}|$ bylo minimální. Sestrojte i duální úlohu.