Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 5. cvičení*

17. března 2020

1 Mnohostěny

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0,1]$ platí $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K. *Konvexní mnohostěn* je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P. Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P. Stěny dimenzí 0, 1 a $d-1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*.

Příklad 1. *Dokažte, že množina všech optimálních řešení lineárního programu* $\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$ *za podmínek* $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, *kde* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, *je konvexní množina.*

Příklad 2. *Mějme mnohostěn* $P \subseteq \mathbb{R}^3$ *určený množinou vrcholů*

$$\mathbf{a} = (2,1,6), \quad \mathbf{b} = (0,-5,0), \quad \mathbf{c} = (-2,2,-1), \quad \mathbf{d} = (0,-4,0), \quad \mathbf{e} = (0,1,1).$$

Pro každou z následujících rovin určete, zda je vůči P tečná, sečná či mimoběžná. Pro tečné roviny určete dimenzi příslušné stěny.

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 5x + 3y - 2z = 1\}$,

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y - z = 2\}$,

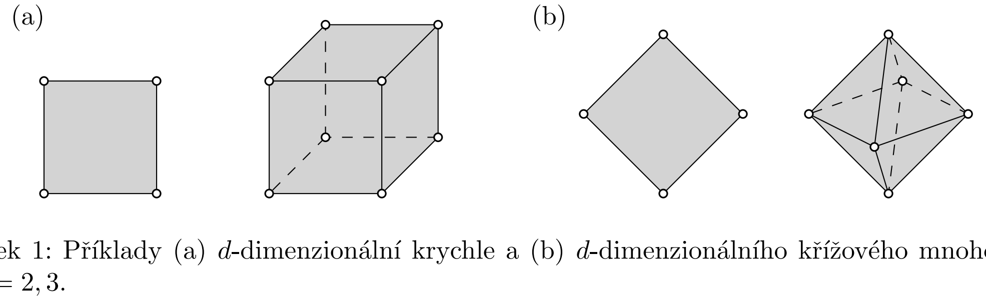
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 3x + z = 0\}$.

Příklad 3. *Počty stěn pro známé mnohostěny v* $\mathbb{R}^d$, *kde* $d \in \mathbb{N}$.

(a) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionální krychle $[0,1]^d$?

(b) Jaký je počet vrcholů a faset d-dimenzionálního křížového mnohostěnu *(neboli zobecněného osmistěnu)*

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \colon |x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots + |x_d| \leq 1\}?$$



Obrázek 1: Příklady (a) d-dimenzionální krychle a (b) d-dimenzionálního křížového mnohostěnu pro $d = 2, 3$.

Příklad 4. *Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného následujícími nerovnostmi a zdůvodněte, že jiné vrcholy neexistují:*

$$\begin{aligned} x + y + z &\leq 3, \\ y + 2z &\leq 2, \\ x, y, z &\geq 0. \end{aligned}$$

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

Příklad 5. *Rozhodněte, zda je bod* $\mathbf{v} = (1,1,1)$ *vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nerovnic:*

$$\text{(a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -10 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$