

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 4. cvičení*

10. března 2020

1 Základní pojmy z geometrie

1.1 Afinita

Afinní prostor $A \subseteq \mathbb{R}^d$ má tvar $L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$. Afinní prostor jde určit pomocí soustavy rovnic $Mx = \mathbf{b}$. Dimenze afinního prostoru A je rovna dimenzi jeho přidruženého lineárního prostoru L . Afinní kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^d$ je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *afinně nezávislá*, pokud platí, že žádný vektor $\mathbf{v} \in V$ není afinní kombinací ostatních vektorů z V . Afinní obal $\text{af}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina všech afinních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Příklad 1. Necht $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + \mathbf{v}$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor $\mathbf{v}$. Dokažte, že pro dané $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ existuje nanejvýš jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^d$ takový, že $A = L + \mathbf{v}$.

(*) Charakterizujte všechny vektory $\mathbf{v}$, které posunou lineární prostor L na afinní prostor A .

1.2 Nadroviny

Nadrovina je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d - 1$. V rovině nadroviny odpovídají přímkám a v $\mathbb{R}^3$ zase rovinám. Nadrovinu lze zapsat jako $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = h\}$ pro $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ a $h \in \mathbb{R}$. Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva *poloprostory*. Nadrovinu samotnou počítáme jako součást obou poloprostorů.

Příklad 2. (a) Mohou se v $\mathbb{R}^4$ dvě roviny protínat v jednom bodě? Jak mohou vypadat průniky dvou rovin v $\mathbb{R}^4$?

(b) Mohou se v $\mathbb{R}^5$ dva afinní prostory dimenze 3 protínat v jednom bodě?

1.3 Konvexita

Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je *konvexní*, pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ a $t \in [0, 1]$ platí $t\mathbf{x} + (1 - t)\mathbf{y} \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K je celá v K . Vektor $\mathbf{x}$ je *konvexní kombinací* vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, pokud $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Množina $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je v *konvexní poloze* (neboli *konvexně nezávislá*), pokud platí, že žádný vektor $\mathbf{v} \in V$ není konvexní kombinací ostatních vektorů z V . Konvexní obal $\text{conv}(V)$ množiny vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je množina konvexních kombinací jakékoli konečné podmnožiny vektorů z V .

Příklad 3. Víme, že v $\mathbb{R}^d$ je maximálně d lineárně nezávislých vektorů a maximálně $d + 1$ afinně nezávislých vektorů. Kolik nejvýše je v $\mathbb{R}^d$ konvexně nezávislých vektorů?

Příklad 4. (*) Z definice je množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ je konvexní, pokud do K patří všechny úsečky s oběma konci v K . Dokažte podobný popis pro afinitu: množina A je afinním podprostorem v $\mathbb{R}^d$ právě tehdy, když pro každé dva body $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ platí, že přímka určená body $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je celá obsažena v A .

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

1.4 Mnohostěny

Konvexní mnohostěn je průnikem konečně mnoha poloprostorů. Alternativně je konvexním mnohostěnem libovolná množina bodů tvaru $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ pro nějakou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Nechť P je konvexní mnohostěn a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$. Jestliže pro každé $\mathbf{x} \in P$ platí $\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \leq t$ a zároveň existuje $\mathbf{x} \in P: \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t$, pak množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = t\}$ tvoří *tečnou nadrovinu* H mnohostěnu P . Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem P pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P . K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P . Stěny dimenzí 0, 1 a $d - 1$ nazýváme *vrcholy*, *hrany* a *fasety*. Konvexní mnohostěn je *omezený*, pokud je obsažený v kouli s konečně velkým poloměrem.

Příklad 5. Jaký je počet stěn krychle a osmistěnu v $\mathbb{R}^3$?

Příklad 6. Mějme mnohostěn $P = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1 \text{ \& } x \leq 2\}$. Převeďte zápis jeho dvou nerovnicových podmínek do rovnicového tvaru a nakreslete mnohostěn z rovnicového tvaru (jeho prostoru vzroste dimenze).

Příklad 7. Nechť P je konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^d$ a necht' F a G jsou jeho stěny. Dokažte, že $F \cap G$ je stěnou P .

Přesněji $F = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = \alpha\}$ a $G = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d: \mathbf{b}^\top \mathbf{x} = \beta\}$, kde platí $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq \alpha$ a $\mathbf{b}^\top \mathbf{x} \leq \beta$ pro každé $\mathbf{x} \in P$. Uveďte formuli, která stěnu $F \cap G$ určuje.