

Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 3. cvičení*

3. března 2020

1 Ostré nerovnosti

Příklad 1. *Lineární programy a ostré nerovnosti.*

(a) *Mějme systém lineárních nerovnic, který obsahuje i ostré nerovnosti. Například tento:*

$$\begin{aligned}5x + 3y &\leq 8 \\2x - 5z &< -3 \\6x + 5y + 2w &= 5 \\3z + 2w &> 5 \\x, y, z, w &\geq 0\end{aligned}$$

Zformulujte úlohu lineárního programování, která zjistí, zda má tento systém přípustné řešení.

(b) *Přidáme-li účelovou funkci, pak daný lineární program nemusí mít optimum, i když je hodnota optima omezená. Zkonstruuje úlohu LP s ostrými nerovnostmi, která:*

- *má (triviální) konečný horní odhad na hodnotu optima,*
- *má přípustné řešení, ale*
- *nemá optimální řešení.*

Toto se pro lineární program bez ostrých nerovností nemůže stát. Pokud je lineární program omezený a existuje přípustné řešení, tak také existuje optimální řešení.

Příklad 2. *Oddělování přímkou: navrhnete řešení následujícího problému s využitím předchozího příkladu. V rovině je dáno m bílých bodů $b_1, \dots, b_m$ a n černých bodů $c_1, \dots, c_n$. Chceme zjistit, zda existuje přímka, která má všechny bílé body na jedné straně a všechny černé body na druhé straně (na přímce žádný bod být nemůže).*

2 Další NP-těžké úlohy a celočíselné lineární programy

Příklad 3. *Pro Problém 3-obarvitelnosti grafu, neboli pro problém rozhodnout, zda lze vrcholy zadaného grafu G korektně obarvit třemi barvami, vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program by měl pouze otestovat, zda je G 3-obarvitelný.*

(*) *Jak by mohla vypadat celočíselná úloha LP, která spočítá barevnost grafu G , neboli nalezně minimální k takové, že vrcholy G lze korektně obarvit k barvami?*

Příklad 4. *Kocourkovští radní se rozhodli, že přilepší obecnímu rozpočtu rozmístěním radarů na měření rychlosti na křižovatkách. Pro správnou funkčnost je třeba, aby každý úsek ulice mezi dvěma křižovatkami měl alespoň jednu z koncových křižovatek pokrytou. Dodavatel si účtuje fixní poplatek $c > 0$ za každou křižovátku, na kterou bude systém nainstalován.*

Zformulujte celočíselný lineární program, který umožní radním optimálně naplánovat rozmístění měřícího systému.

Příklad 5. *Díky navýšení rozpočtu plánují Kocourkovští radní tento víkend uspořádat festival představující aktivity dostupné občanům (spolek dobrovolných hasičů, městská dechová hudba, vodácký oddíl, ...). Kvůli pestrosti festivalu chtějí radní, aby probíhalo co nejvíce akcí zároveň. Musí se ale vypořádat s tím, že místní jsou velice aktivní. Mnozí organizátoři jsou důležití pro několik jednotlivých akcí a ty proto nemůžou proběhnout naráz. Radní dostali seznamy organizátorů jednotlivých akcí a vědí tedy, které akce jsou spolu v konfliktu.*

Zformulujte celočíselný lineární program pro naplánování co nejnabitějšího festivalu.

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>