Lineární programování a kombinatorická optimalizace – příklady na 2. cvičení*

25. února 2020

1 Celočíselné lineární programy

Z minula víme, že spousta problémů se dá naformulovat jako úloha lineárního programování a poté lze efektivně řešit. Dnes si ukážeme, že vyžadujeme-li celočíselná řešení (což je mnohdy přirozený požadavek), pak obecně přijdeme o efektivní řešení, protože lze podobně naformulovat spoustu NP-těžkých problémů. Existují ovšem problémy, pro které je vždy nějaké optimální řešení celočíselné.

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektory $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Potom úlohou *celočíselného (lineárního) programování* je následující optimalizační úloha

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n.$$

U úlohy *binárního (lineárního) programování* vyžadujeme podmínku $\mathbf{x} \in \{0,1\}^n$ a u úlohy *smíšeného (lineárního) programování* jsou některé proměnné reálné a některé celočíselné.

Příklad 1. *Pro zadanou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a vektory $b \in \mathbb{R}^m$ a $c \in \mathbb{R}^n$ uvažujme příslušný celočíselný program a lineární program:*

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, \tag{CP}$$

$$\max \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \text{ za podmínek } A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \text{ pro } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{LP}$$

Předpokládejme, že oba programy jsou řešitelné a mají optimální řešení $\mathbf{x}^*_{CP}$ a $\mathbf{x}^*_{LP}$. Dokažte, že platí nerovnost $\mathbf{c}^\top\mathbf{x}^*_{CP} \le \mathbf{c}^\top\mathbf{x}^*_{LP}$.

Příklad 2. *Zformulujte* Problém batohu *pomocí celočísleného lineárního programování. Tedy pro n předmětů, kde i-tý má nějakou váhu v_i a cenu c_i, máme batoh s danou nosností V a my se do něj snažíme naskládat předměty tak, abychom maximalizovali celkovou cenu předmětů v batohu.*

Příklad 3. *V Kocourkově je n pekáren a m obchodů. Každý den i-tá pekárna upeče $p_i \in \mathbb{N}$ rohlíků a j-tý obchod prodá $o_j \in \mathbb{N}$ rohlíků, kde $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{j=1}^m o_j$. Převoz jednoho rohlíku z i-té pekárny do j-tého obchodu stojí c_{ij} korun.*

(a) Zfromulujte celočíselnou úlohu LP, která nalezne takovou distribuci rohlíků, aby se každá pekárna zbavila všech rohlíků, každý obchod získal právě potřebný počet rohlíků a celkové náklady na převoz byly minimální.

(b) Praxe v Kocourkově ukázala, že když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod, tak musí pro tuto trasu zajistit logistiku, která je stojí l_{ij}. Logistiku $l_{ij} \ge 0$ je nutné platit pouze tehdy, když i-tá pekárna zásobuje j-tý obchod nenulovým počtem rohlíků, a její cena nezávisí na počtu převážených rohlíků. I nadále je nutné platit přepravné c_{ij}. Zformulujte příslušnou úlohu LP.

Příklad 4. *Student Maxim Dokonalý dostal na cvičení zadaný úkol: „Navrhněte celočíselný program pro* Problém obchodního cestujícího, *čili pro daný ohodnocený neorientovaný graf $G = (V, E, f)$, kde $f : E \to \mathbb{R}_0^+$, chceme najít Hamiltonovskou kružnici v G s nejmenším ohodnocením.“*

Maxim navrhuje toto řešení: „Pro každou hranu $e \in E$ zavedeme proměnnou $x_e \in \{0,1\}$, účelovou funkcí bude $\min \sum_{e\in E} f(e)x_e$ a zavedeme podmínky $\sum_{e\in E:\, u\in e} x_e = 2$ pro každý vrchol $u \in V$.“

Funguje řešení Maxima? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte, proč nefunguje, a ještě vymyslete lepší.

Příklad 5. *Pro* Problém 3-obarvitelnosti grafu, *neboli pro problém rozhodnout, zda lze vrcholy zadaného grafu G koretně obarvit třemi barvami, vymyslete vhodný celočíselný lineární program. Program by měl pouze otestovat, zda je G 3-obarvitelný.*

(*) Jak by mohla vypadat celočíselná úloha LP, která spočítá barevnost grafu G, neboli nalezne minimální k takové, že vrcholy G lze korektně obarvit k barvami?

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/